WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515 A5, C201

2. Mai 2001

2. Übungsblatt zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Auf wie viele Arten kann acht als Summe dreier nichtnegativer ganzer Zahlen geschrieben werden, wenn es auch auf die Reihenfolge der Summanden ankommt?

Lösung: Wie wir beim Zählen der UM-Proben gesehen haben, gibt es

$$\binom{8+3-1}{2} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \quad \text{Möglichkeiten.}$$

2) *Richtig oder falsch:* Das gleichzeitige Werfen dreier gleich aussehender Würfel führt zu $\binom{6+3-1}{3} = 56$ möglichen Ergebnissen.

Lösung: *Richtig;* aus einer Grundgesamtheit von sechs Elementen wird eine ungeordnete Dreierprobe mit Wiederholungen gezogen.

3) *Richtig oder falsch:* Jedes der möglichen Ergebnisse beim gleichzeitigen Werfen dreier gleich aussehender Würfel hat dieselbe Wahrscheinlichkeit.

Lösung: *Falsch;* $\{6,6,6\}$ etwa hat nur die Wahrscheinlichkeit $1/6^3$, während $\{1,2,3\}$ auf sechs Arten zustandekommen kann und damit Wahrscheinlichkeit $6/6^3 = 1/6^2$ hat.

4) *Richtig oder falsch:* Die Menge Ω bestehe aus Äpfel, Birnen, Nüssen und Bananen im Gesamtwert von 80 DM. Für eine Teilmenge $M \subseteq \Omega$ sei $P(M)$ der Wert von M, dividiert durch 80 DM. Dann ist P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\big(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega)\big)$.

Lösung: *Richtig;* nichts kostet nichts, Preise disjunkter Teilmengen addieren sich, und das Maß der Gesamtmenge ist auf eins normiert.

5) *Richtig oder falsch:* Ist P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, so auch $1 - P$.

Lösung: *Falsch;* $1 - P$ ordnet der leeren Menge die Wahrscheinlichkeit eins zu!

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*
Ein Parallelrechner habe drei Prozessoren, auf die 10 Prozesse verteilt werden sollen. Das etwas dumme Betriebssystem organisiert dies so, daß für jeden Prozeß unabhängig von den anderen Prozessen eine Zufallsauswahl unter den Prozessoren getroffen wird.

a) Wie viele Möglichkeiten zur Verteilung gibt es?

Lösung: Für jeden Prozeß gibt es drei Möglichkeiten; da die Prozesse unabhängig voneinander auf die Prozessoren verteilt werden, gibt es insgesamt $3^{10} = 59\,049$ Möglichkeiten.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß dem Prozessor I kein Prozeß zugewiesen wird?

Lösung: Jeder einzelne Prozeß wird mit Wahrscheinlichkeit 2/3 nicht dem Prozessor I zugeordnet; die Wahrscheinlichkeit, daß keiner der zehn zu Prozessor I kommt, ist also $\left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0{,}01734153$.

c) …, daß *mindestens* einem Prozessor kein Prozeß zugewiesen wird?

Lösung: Wir benutzen die Siebformel: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\,,$$

wobei A_i für das Ereignis *Prozessor* i *erhält keinen Prozeß* stehen soll. Nach *a)* ist $P(A_i) = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$.

$A_i \cap A_j$ ist das Ereignis, daß der verbleibende Prozessor $\neq i, j$ *alle* Prozesse erhält; diese Wahrscheinlichkeit ist $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$.

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ ist das Ereignis, daß die Prozesse keinem der drei Prozessoren zugewiesen werden; dieses Ereignis ist unmöglich.

Damit ist

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10} - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} + 0 = \frac{2^{10}-1}{3^9} = \frac{1023}{19\,683} \approx 0{,}05197378\,.$$

d) …, daß *genau* einem Prozessor kein Prozeß zugewiesen wird?

Lösung: Dieses Ereignis unterscheidet sich vom vorhergehenden dadurch, daß nun nicht gleich *zwei* der drei Prozessoren keinen Prozeß erhalten dürfen, daß also nicht alle Prozesse demselben Prozessor zugewiesen werden dürfen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein fester Prozessor alle Prozesse bearbeitet, ist $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$; die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dies *irgendein* Prozessor tut, ist also $\left(\frac{1}{3}\right)^{9}$. Um diese Zahl veringert sich die Wahrscheinlichkeit aus der vorigen Teilaufgabe; wir erhalten

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10} - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9} = \frac{2^{10}-2}{3^9} = \frac{1022}{19\,683} \approx 0{,}05192298\,.$$

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

Eine Verpackungsmaschine nimmt aus einen großen Reservoir zehn Kugelschreiber und steckt diese in einen Beutel. Das Reservoir enthält rote, blaue, grüne und schwarze Kugelschreiber, wobei alle Farben gleichstark vertreten sind.

a) Wie viele mögliche Verteilungen der Farben auf die Zehnerbeutel gibt es?

Lösung: Da die Kugelschreiber in einem Beutel keine natürliche Ordnung haben, geht es hier um eine ungeordnete Probe; das große Reservoir kann auch modelliert werden durch eine Menge von vier Farben, aus der eine ungeordnete Probe mit Wiederholungen im Umfang zehn gezogen wird. Die Anzahl der Möglichkeiten hierfür ist

$$\binom{4+10-1}{4-1} = \binom{13}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3!} = 13 \cdot 2 \cdot 11 = 286\,.$$

b) Bei wie vielen davon enthält der Beutel nur Kugelschreiber zweier *verschiedener* Farben?

Lösung: Betrachten wir zunächst nur Beutel mit Kugelschreibern der Farben rot und blau (oder einer beliebigen festgewählten anderen Farbkombination); der Beutel enthalte i rote und j blaue Kugelschreiber. Da beide Farben wirklich vorkommen müssen, sind i und j positiv; außerdem haben sie die Summe zehn. Dafür gibt es die neun Möglichkeiten $i = 1, \ldots, 9$ und $j = 10 - i$.

Aus vier Farben lassen sich auf $\binom{4}{2} = 6$ Arten zwei Farben auswählen; jedem Beutel mit Kugelschreibern zweier verschiedener Farben ist genau eine dieser Farbkombination zugeordnet, und für jede davon gibt es neun Möglichkeiten, wie der Beuter gefüllt sein kann. Also gibt es insgesamt $6 \cdot 9 = 54$ Möglichkeiten für Beutel mit Kugelschreiber zweier verschiedener Farben.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig herausgegriffener Beutel nur Kugelschreiber zweier *verschiedener* Farben enthält?

Lösung: Wir berechnen zunächst wieder die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er nur rote und blaue Kugelschreiber enthält. Jeden Kugelschreiber, der in den Beutel fällt, ist mit Wahrscheinlichkeit 1/2 rot oder blau; da die Kugelschreiber unabhängig voneinander ausgewählt werden, ist also die Wahrscheinlichkeit, daß alle rot oder blau sind 1/1024. Darunter sind aber auch noch die Fälle, daß alle Kugelschreiber rot oder alle Kugelschreiber blau sind; da uns nur Beutel interessieren, in denen *beide* Farben vorkommen, müssen wir die Wahrscheinlichkeiten für diese beiden Fälle noch subtrahieren. Offensichtlich hat jeder der beiden Fälle die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{4}\right)^{10} = 2^{-20}$; die Wahrscheinlichkeit für einen Beutel, der rote und blaue Kugelschreiber enthält und sonst nichts, ist also

$$2^{-10} - 2 \cdot 2^{-20} = 2^{-10} - 2^{-19} = \frac{2^9 - 1}{2^{19}} = \frac{511}{524\,288} = 0{,}0009746551513671875\,.$$

Die in der Aufgabenstellung gesuchte Wahrscheinlichkeit ist, wie bei *b)*, sechsmal so groß, also

$$\frac{6 \cdot 511}{524\,288} = \frac{3066}{524\,288} = 0{,}005847930908203125\,.$$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

Für eine Studie werden den 30 Schülern einer Klasse fünf Fragen gestellt; dazu wird vor jeder Frage ein Schüler ausgewählt durch einen Zufallsprozeß, der (gleichwahrscheinliche) Zahlen zwischen eins und dreißig liefert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß

a) alle Fragen von Schülern beantwortet werden, die zu den zehn Besten gehören?

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit, daß für eine bestimmte Fragen einer der zehn besten Schüler ausgewählt wird, ist $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$; da die Wahlen der Schüler für die verschiedenen Fragen unabhängig voneinander sind, liegt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß dies fünfmal hintereinander passiert, bei

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243} \approx 0{,}004115226337\,.$$

b) mindestens je eine von einem Schüler aus dem oberen, mittleren und unteren Drittel?

Lösung: Das ist wieder ein Fall, in dem man besser zunächst das komplementäre Ereignis betrachtet. Dieses tritt ein, falls (mindestens) eine der drei Gruppen keine Frage beantwortet.

Für ein festgewähltes Drittel ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es bei einer bestimmten Frage nicht drankommt, zwei Drittel; die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es bei keiner der fünf Fragen drankommt, ist also $\left(\frac{2}{3}\right)^5$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß *irgendein* Drittel keine der fünf Fragen beantwortet, läßt sich leicht nach der Siebformel berechnen: Ist A_i das Ereignis, daß das i-te Drittel nicht drankommt, so ist das gesuchte Ereignis die Vereinigung aller A_i, und nach der Siebformel ist $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\,.$$

$P(A_i)$ ist jeweils gleich $\left(\frac{2}{3}\right)^5$. Das Ereignis $A_2 \cap A_3$ ist äquivalent dazu, daß das erste Drittel alle Fragen beantwortet, und die Wahrscheinlichkeit dafür ist nach *a)* gleich $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; gleiches gilt natürlich auch für die anderen Zweierdurchschnitte.

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ schließlich ist das Ereignis, daß keine der drei Gruppen eine Frage beantworten muß; dies kann nicht eintreten, da die fünf Fragen wirklich gestellt werden. Somit ist

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{2^5 - 1}{3^4} = \frac{31}{81} \approx 0{,}382716\,.$$

Gefragt war nach der komplementären Wahrscheinlichkeit; diese ist $\dfrac{50}{81} \approx 0{,}617284$.

c) ein bestimmter Schüler eine Frage beantworten muß?

Lösung: Das komplementäre Ereignis ist, daß er keine Frage beantworten muß. Bei jeder einzelnen Frage ist die Wahrscheinlichkeit, daß er verschont bleibt, gleich 29/30, insgesamt also die fünfte Potenz davon.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er (mindestens) eine Frage beantworten muß, ist daher

$$1 - \left(\frac{29}{30}\right)^5 \approx 0{,}1559197942\,.$$