Wolfgang K. Seiler — A5, C201
Tel. 2515

24. April 2001

1. Übungsblatt zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Beim Roulettespiel ist *rouge* ein Elementarereignis.

Lösung: *Falsch;* Elementarereignisse sind die Zahlen von 0 bis 36; *rouge* ist das zusammengesetzte Ereignis $\{1,3,5,7,9,12,14,16,18,19,21,23,25,27,30,32,34,36\}$.

2) *Richtig oder falsch:* Beim Werfen einer Münze ist $\{Kopf\} \cup \{Zahl\}$ ein sicheres Ereignis.

Lösung: *Richtig,* denn auf eine der beiden Seiten muß sie fallen.

3) *Richtig oder falsch:* Beim Werfen einer Münze ist $\{Kopf\} \,\Delta\, \{Zahl\}$ ein sicheres Ereignis.

Lösung: *Richtig,* denn da die beiden Mengen kein Element gemeinsam haben, ist die symmetrische Differenz gleich der Vereinigung.

4) Bei *Mensch ärgere Dich nicht* darf jeder, der eine Sechs würfelt, noch einmal würfeln. Was ist der Ereignisraum Ω für die Gesamtaugenzahl?

Lösung: Da nach einer Sechs stets noch einmal gewürfelt wird, sind Vielfache von Sechs unmöglich; damit ist Ω die Menge aller nicht durch Sechs teilbarer natürlicher Zahlen.

5) Geben Sie für Ω aus *4)* und $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ das Wahrscheinlichkeitsmaß $P\colon \mathcal{A} \to [0, 1]$ an!

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit, daß k Sechsen fallen und dann eine vorgegebene Zahl j ist $\frac{1}{6^{k+1}}$. Ist also $n \in \Omega$ und $k = [n/6]$, so ist $P(\{n\}) = \frac{1}{6^{k+1}}$ und für $M \subseteq \Omega$ ist

$$P(M) = \sum_{n\in M} P(\{n\}) .$$

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*
Bei einer bayrischen Saalschlacht verletzten sich 80% der Teilnehmer am Kopf, 50% erlitten Prellungen und 60% zerbrachen ihren Maßkrug am Kopf eines anderen Teilnehmers.

a) Geben Sie Höchst- und Mindestwerte an für den Anteil unverletzt gebliebener Personen.

Lösung: Da 80% der Teilnehmer eine Kopfverletzung erlitten, kann der Anteil sicher nicht höher als 20% sein. Dieser Wert selbst kann auftreten, falls nämlich jeder, der eine Prellung erlitt, sich auch am Kopf verletzte. Andererseits ist auch möglich, daß sich alle 20% ohne Kopfverletzung eine Prellung zuzogen; der Mindestanteil unverletzter Personen ist also null. (Maßkrüge spielen bei diesem Aufgabenteil keine Rolle: Der Bruch eines Maßkrugs mag zwar schmerzen, ist aber keine Verletzung.)

b) *Ditto* für Verletzte mit noch intaktem Maßkrug

Lösung: Die Verletzten bilden die Komplementärmenge der unverletzt gebliebenen; ihr Anteil liegt also zwischen 80% und 100%. Am Schluß hatten noch insgesamt 40% einen intakten Maßkrug; es ist möglich, daß diese alle verletzt waren, so daß der gesuchte Höchstwert bei 40% liegt. Im anderen Extrem wäre es auch möglich, daß es 20% Unverletzte gab, die allesamt noch einen intakten Maßkrug haben; dann gäbe es nur 20% Verletzte mit intaktem Maßkrug.

c) Ein Kontakt zwischen einem Kopf und einem Maßkrug führte in 90% der Fälle zu Beschädigungen am betroffenen Krug und in 75% der Fälle zu solchen am betroffenen Kopf. Jeder, die seinen Maßkrug als Argumentationshilfe einsetzte, tat dies so lange, bis dieser zerbrach. Wieviel Prozent der Kopfverletzungen gehen auf Maßkrüge zurück?

Lösung: Berechnen wir als erstes die durchschnittliche Anzahl von Kopfkontakten eines Maßkrugs, bevor er zerbricht: Sie ist mindestens eins, denn vor dem ersten Zusammentreffen mit einem Kopf kann der Krug nicht zerbrechen; in einem Zehntel der Fälle gibt es aber noch die Gelegenheit zu mindestens einem weiteren Kontakt. In einem Zehntel *dieser* Fälle, insgesamt also in jedem hundertsten Fall, gibt es noch eine dritte Chance für den Krug und so weiter; insgesamt trifft der Kurg also vor dem Zerbrechen auf durchschnittlich

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}$$

Köpfe. Da 60% aller Schlachtteilnehmer ihren Maßkrug am Kopf eines anderen Teilnehmers verloren, hatten somit

$$\frac{10}{9}\times 60\%=\frac{10}{9}\times\frac{6}{10}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

aller Köpfe Maßkrugkontakt.
In 75% der Fälle führte dies zu einer Kopfverletzung; wegen

$$\frac{2}{3}\times 75\%=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$

also bei der Hälfte aller Teilnehmer. Da 80% aller Teilnehmer Kopfverletzungen erlitten, ist somit der Anteil maßkrugbedingter Kopfverletzungen

$$\frac{50}{80}=\frac{5}{8}=0{,}625=62{,}5\%\,.$$

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)
Ein Aufzug startet im Erdgeschoß mit acht Personen (Beate Bär, Edeltraut Emu, Franziska Fisch, Gisbert Gnu, Peter Panther, Sigrid Schimmel, Theobald Tiger, Ute Utang), die allesamt in irgendeinem der fünf höheren Stockwerke aussteigen. Finden Sie eine σ-Algebra Ω zur Modellierung der möglichen Szenarien unter der Voraussetzung, daß es

a) nur auf die *Anzahl* der Personen ankommt, die in einem gegebenen Stockwerk aussteigen

Lösung: Gesucht ist natürlich der *Ereignisraum* Ω; als zugehörige σ-Algebra können wir, wie bei jedem endlichen Ω, einfach die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ nehmen.

Da es nur auf die Anzahl der Personen ankommt, die in einem Stockwerk aussteigen, nehmen wir als Elementarereignisse Quintupel $(n_1, \dots, n_5)$, wobei n_i die Anzahl der im i-ten Stockwerk aussteigenden Personen ist. Insgesamt gibt es acht Personen, also ist

$$\Omega = \left\{ (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) \in \mathbb{N}_0^5 \;\middle|\; n_1 + \cdots + n_5 = 8 \right\}$$

b) zwischen Frauen und Männern unterschieden wird

Lösung: Jetzt brauchen wir für jedes Stockwerk zwei Variablen f_i und m_i für die Anzahl der dort aussteigenden Frauen und Männer; also ist

$$\Omega = \left\{ (f_1, m_1, f_2, m_2, f_3, m_3, f_4, m_4, f_5, m_5) \in \mathbb{N}_0^{10} \;\middle|\; f_1 + \cdots + f_5 = 5 \text{ und } m_1 + \cdots m_5 = 3 \right\}$$

c) die Personen wohlunterscheidbar sind!

Lösung: Hier können wir für jedes Stockwerk die Menge der dort aussteigenden Personen betrachten; mit

$$M = \{\text{B. Bär, E. Emu, F. Fisch, G. Gnu, P. Panther, S. Schimmel, T. Tiger, U. Utang}\}$$

ist also $\Omega = \left\{ (M_1, M_2, M_3, M_4, M_5) \in \mathfrak{P}(M)^5 \;\middle|\; M_1 \uplus \cdots \uplus M_5 = M \right\}$.
Eine andere Art der Modellierung besteht darin, jeder der acht Personen das Stockwert s_i zuzuordnen, in der sie aussteigt; dies führt auf $\Omega' = \{1, 2, 3, 4, 5\}^8$.

Wie viele Elemente enthält Ω jeweils?

Lösung: Mit dem Stoff der zweiten Vorlesungswoche wäre dies im Fall *a)* sehr einfach:

$$\#\Omega = \binom{8+5-1}{8} = \binom{12}{8} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495 \,.$$

Nur mit dem Stoff der ersten Vorlesungswoche ausgerüstet, müssen wir zählen: Sei A_{mr} die Anzahl der Möglichkeiten für m Personen und r Stockwerke. Dann ist

$$A_{mr} = \sum_{i=0}^{m} A_{m-i,r-1} = \sum_{i=0}^{m} A_{i,r-1} \,,$$

denn wenn im ersten Stockwerk i Personen aussteigen, müssen wir noch $m - i$ auf die restlichen Stockwerke verteilen. Daraus folgt sofort, daß $A_{mr} = A_{m-1,r} + A_{m,r-1}$ ist. Außerdem ist $A_{m1} = A_{0r} = 1$, denn wenn es nur ein Stockwerk gibt, müssen alle dort aussteigen, und wenn niemand im Fahrstuhl ist, kann auch niemand aussteigen. Dies führt zur folgenden Tabelle, in der jeder Eintrag Summe seines linken und seines oberen Nachbarn ist (und in der man in den Diagonalen deutlich Binomialkoeffizienten sieht, die sich auch leicht beweisen lassen).

	$m = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$r = 1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$r = 2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$r = 3$	1	3	6	10	15	21	28	36	45
$r = 4$	1	4	10	20	35	56	84	120	165
$r = 5$	1	5	15	35	70	126	210	330	495

Also gibt es $A_{85} = 495$ Möglichkeiten.

Im Fall *b)* können wir Frauen und Männer unabhängig voneinander betrachten; die Anzahl der Möglichkeiten ist somit

$$A_{35} \cdot A_{55} = 35 \cdot 126 = 4410 .$$

Im Fall *c)* schließlich führt die zweite Art der Modellierung sofort zur Anzahl

$$\#\Omega' = 5^8 = 390\,625 .$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Theobald Tiger *bzw.* irgendein Mann *bzw.* irgendeine Person im dritten Obergeschoß aussteigt, wenn man davon ausgeht, daß jede der acht Personen mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jedem der fünf Stockwerke aussteigt und die einzelnen Personen unabhängig voneinander handeln?
Hinweis: Manchmal ist es einfacher, zunächst die Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses zu berechnen!

Lösung: Am einfachsten ist das für Theobald Tiger zu beantworten: Wie jede andere Person auch steigt er mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jedem der fünf Stockwerke aus; die Wahrscheinlichkeit, daß dies im dritten passiert, ist also $1/5$.
Die Wahrscheinlichkeit, daß irgendeine feste Person *nicht* im dritten Obergeschoß aussteigt, ist $4/5$; die Wahrscheinlichkeit, daß r voneinander unabhängige Personen dies nicht tun, ist also $\left(\frac{4}{5}\right)^r$. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, daß irgendeine Person im dritten Stockwerk aussteigt,

$$1 - \left(\frac{4}{5}\right)^8 = 1 - 0{,}8^8 = 0{,}83222784 .$$

Für irgendeinen Mann ist die Wahrscheinlichkeit entsprechend

$$1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 1 - 0{,}8^3 = 0{,}488 .$$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Geben Sie alle σ-Algebren $\mathcal{A}$ über $\Omega = \{1, 2, 3\}$ explizit an!

Lösung: Zunächst einmal gibt es die kleinstmögliche σ-Algebra $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$.
Als nächstes betrachten wir die kleinste σ-Algebra, die zusätzlich die Menge $\{1\}$ enthält. Dann muß sie auch die Komplementärmenge $\{2, 3\}$ enthalten und natürlich $\emptyset$ und Ω. Dieses System von vier Mengen ist abgeschlossen unter Vereinigungen, Durchschnitten und dem Bilden der Komplementärmenge, ist also eine σ-Algebra. Genauso erhält man die kleinste σ-Algebra, die $\{2\}$ *bzw.* $\{3\}$ enthält. Damit sind die drei weiteren Algebren

$$\mathcal{A}_2 = \big\{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2,3\}\big\} , \; \mathcal{A}_3 = \big\{\emptyset, \Omega, \{2\}, \{1,3\}\big\} \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_4 = \big\{\emptyset, \Omega, \{3\}, \{1,2\}\big\}$$

gefunden. Dies sind auch jeweils die kleinsten σ-Algebren, die die darin vorkommende zweielementige Menge enthalten.
Eine größere σ-Algebra $\mathcal{A}$ muß noch irgendeine einelementige oder zweielementige Menge zusätzlich enthalten. Indem wir die Komplemente dazunehmen, sehen wir sofort, daß $\mathcal{A}$ mindestens zwei einelementige Mengen enthält. Damit liegt aber auch die dritte einelementige Teilmenge von Ω in $\mathcal{A}$, denn sie ist das Komplement der Vereinigung der beiden ersten. Somit enthält $\mathcal{A}$ alle einelementigen Teilmengen von Ω und (als Vereinigungen solcher Mengen) sogar *alle* Teilmengen von Ω. Die einzige verbleibende Möglichkeit ist also die Potenzmenge $\mathcal{A}_5 = \mathfrak{P}(\Omega)$.