WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C 201

13. Juli 2001

Klausur zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je zwei Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Auf wie viele Arten kann man auf einer zweielementigen Menge eine σ-Algebra definieren?

2) *Richtig oder falsch:* Mit $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ist auch $Y = \sin X$ meßbar.

3) $\Omega = \{1, \dots, 10\}$ bestehe aus den ersten zehn natürlichen Zahlen, und auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ sei ein Maß μ definiert, das jeder Teilmenge deren Elementanzahl dividiert durch zehn zuordnet. Was ist $\int_\Omega x^2\, d\mu$?

4) Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit Erwartungswert null und Varianz $1/2$. Was ist $\mathrm{Cov}(X, X^2)$?

5) Sei $f(t) = t$ und $g(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Was ist $f * g$?

6) Sie wollen die Spannung einer Batterie mit einer Genauigkeit von $\pm 0{,}01\,\mathrm{V}$ messen, haben aber nur ein Voltmeter, mit einer Meßgenauigkeit von $\pm 0{,}02\,\mathrm{V}$. Wie gehen Sie vor?

7) *Richtig oder falsch:* Der stochastische Prozeß $(X_t)_{t\in T}$ sei ein Martingal. Dann ist auch $(X_t^2)_{t\in T}$ ein Martingal.

8) *Richtig oder falsch:* Der stochastische Prozeß $(X_t)_{t\in T}$ sei ein MARKOV-Prozeß. Dann ist auch $(X_t^2)_{t\in T}$ ein MARKOV-Prozeß.

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)

Eine Lostrommel enthält, jeweils in großer Zahl, Lose mit Gewinnwerten von fünf, fünfzehn und vierzig Mark sowie Nieten. Alle vier Arten von Losen sind mit gleicher Häufigkeit vorhanden.

Sie nehmen eine Handvoll Lose heraus; es sind zehn Stück.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es für deren Verteilung auf die vier Klassen?

b) Wie groß ist der Erwartungswert für Ihren Gewinn, falls in der Lostrommel alle vier Gewinnklassen mit gleicher Häufigkeit vertreten sind?

c) N bezeichne die Anzahl der von Ihnen gezogenen Nieten und X Ihren Gesamtgewinn. Was ist $\mathbb{E}(X|N)$?

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

Ein AIDS-Test liefert bei allen Infizierten und bei 0,01% der Nichtinfizierten ein positives Ergebnis. Von Personen, die keiner der bekannten Risikogruppen angehören, sind etwa 0,01% infiziert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine solche Person, bei der ein positives Testergebnis auftritt, tatsächlich infiziert ist?

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 3: (*6 Punkte*)

a) Die Lebensdauer einer Energiesparlampe sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1/4000$, die einer zweiten mit Parameter $\mu = 1/5000$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die zweite Lampe länger brennt als die erste?

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz für die *Summe* der Brenndauern der beiden Lampen!

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer zweidimensionalen Zufallsvariablen $X \otimes Y$ sei gegeben durch

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-y-x/y}}{y} & \text{für } x, y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Was ist $\mathbb{E}(X|Y)$?

Aufgabe 5: (*12 Punkte*)

Beim Lotto werden aus einem Gefäß, das 49 nummerierte Kugeln enthält, nacheinander sechs Kugeln entnommen; die Zufallsvariable X_i stehe für die Zahl auf der i-ten Kugel.

a) Was ist $\mathbb{E}(X_2|X_1)$?

b) Was ist $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$?

c) Verallgemeinern Sie das Ergebnis von *b)* zu einer plausiblen Formel für $\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_6)$ und $\operatorname{Var}(X_1 + \cdots + X_6)$ oder erraten Sie eine solche Formel, falls Sie *b)* nicht gelöst haben! Geben Sie lediglich eine *kurze* Begründung, warum Ihre Formel richtig sein sollte; ein formaler Beweis ist **nicht** gefragt.

d) Berechnen Sie aufgrund der Formeln aus *c)* Erwartungswert und Varianz der Summe aller in einem Jahr (mit 52 Ziehungen) gezogenen Lottozahlen (ohne Zusatzzahl)!

e) Was können Sie über die Verteilung dieser Summe sagen?

f) Geben Sie ein Intervall an, in dem diese Summe mit mindestens 95%-iger Wahrscheinlichkeit liegt!

Einige nützliche Formeln, die ohne Beweis verwendet werden können:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{i=-n}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$\int \lambda t e^{-\lambda t}\, dt = -e^{-\lambda t}\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) + C, \qquad \int \lambda t^2 e^{-\lambda t}\, dt = -e^{-\lambda t}\left(t^2 + \frac{2t}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}\right) + C$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-t^2/2}\, dt \approx 0{,}6826894920 \approx \frac{2}{3}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^{2} e^{-t^2/2}\, dt \approx 0{,}9544997360$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Freitag, dem 13. Juli 2001, um 16.00 Uhr