Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

27. Juni 2001

10. Übungsblatt zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Ist X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert x, so ist X^2 eine Zufallsvariable mit Erwartungswert x^2.

2) Richtig oder falsch: Schreiben tausend Studenten eine Klausur, sind die dort erreichten Punktezahlen annähernd normalverteilt.

3) Richtig oder falsch: Der jährliche Abitursdurchschnitt im Fach Mathematik in Baden-Württemberg ist, als Funktion des Jahres, ungefähr normalverteilt.

4) Richtig oder falsch: X und Y seien voneinander unabhängige diskrete Zufallsvariablen. Dann ist $p(x|y) = p_X(x)$ für alle y mit $p_Y(y) \neq 0$.

5) Richtig oder falsch: X und Y seien voneinander unabhängige Zufallsvariablen. Dann ist $\mathbb{E}(X+Y|Y) = \mathbb{E}(X) + Y$.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*
Durch Digitalisierung von thermischen Rauschen werde eine Folge einer Million Bit erzeugt, deren jedes, unabhängig von den anderen, mit gleicher Wahrscheinlichkeit null oder eins ist. (So etwas ist z.B. gelegentlich in der Kryptographie nützlich.)

a) Wie ist die Anzahl der Nullen unter den erzeugten Bits verteilt?

b) Durch welche Normalverteilung läßt sich dies nach dem zentralen Grenzwertsatz approximieren?

c) Bestimmen Sie (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Anteil der Nullen zwischen 49,9% und 50,1% liegt!

d) Bestimmen Sie (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Anteil der Nullen zwischen 49% und 50% liegt!

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*
Ein beliebtes, weil einfaches Verfahren zur näherungsweisen Erzeugung (standard)-normalverteilter Zufallsvariablen besteht darin, daß man zwölf voneinander unabhängige im Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen addiert und sechs vom Ergebnis subtrahiert. Begründen Sie, warum dieses Verfahren einigermaßen brauchbare Ergebnisse liefert!

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*
Die beiden Zufallsvariablen X und Y seien verteilt gemäß der gemeinsamen Dichtefunktion $f(x,y) = xe^{-x-xy}$ für $x, y > 0$ und $f(x,y) = 0$ sonst. Berechnen Sie $\mathbb{E}(X|Y)$!
Hinweis: $\int xe^{ax}\,dx = \frac{ax-1}{a^2}e^{ax} + C$ und $\int x^2e^{ax}\,dx = \frac{a^2x^2-2ax+2}{a^3}e^{ax} + C$

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 4. Juli 2001, um 13.30 Uhr