Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

12. Juni 2001

8. Übungsblatt zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Eine Funktion $Z\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ läßt sich stets als Produkt $X \otimes Y$ von Funktionen $X, Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ schreiben.

2) *Richtig oder falsch:* Wird auf Ω die Struktur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ eines Wahrscheinlichkeitsraums definiert, so ist in dieser Situation $P_Z = P_X \otimes P_Y$.

3) *Richtig oder falsch:* X sei eine normalverteilte Zufallsvariable und $Y = X^2$. Dann sind X und Y unabhängige Zufallsvariablen.

4) *Richtig oder falsch:* Die marginalen Verteilungen P_X und P_Y legen die Verteilung $P_{X\otimes Y}$ eindeutig fest.

5) X und Y seien voneinander unabhängige Poisson-verteilte Zufallsvariablen; die Parameter seinen λ und μ. Welchen Erwartungswert hat XY?

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Für $\lambda, \mu > 0$ und $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei $\varphi(x,y) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y} & \text{für } x, y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

a) Zeigen Sie, daß φ als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden kann, und berechnen Sie die zweidimensionale Verteilungsfunktion dazu!

b) φ sei die Wahrscheinlichkeitsdichte einer zweidimensionalen Zufallsvariablen $X \otimes Y$. Bestimmen Sie die marginalen Dichten von X und Y!

c) Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $X > Y + 1$?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$ so, daß $\varphi(x,y) = \begin{cases} \alpha e^{-x^2-y} & \text{für } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}^2$ definiert!

b) φ sei die Wahrscheinlichkeitsdichte einer zweidimensionalen Zufallsvariablen $X \otimes Y$. Bestimmen Sie die marginalen Dichten von X und Y!

c) Berechnen Sie den Erwartungswert von X^2Y^2!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Für zwei Zufallsvariablen $X, Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ habe $P_{X\otimes Y}$ die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+(x-y)^2\right)} .$$

a) Berechnen Sie die marginalen Dichten von X und Y!

b) Welche Erwartungswerte haben X und Y?

c) Wie groß sind Kovarianz und Korrelation von X und Y?

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 20. Juni 2001, um 13.30 Uhr