Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

30. Mai 2001

6. Übungsblatt zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

Sei $\Omega = \{1,2,3\}$ und $\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \{1,3\}, \{2\}, \Omega\big\}$ mit $\mu\big(\{2\}\big) = \frac{1}{2}$ und $\mu(\Omega) = 1$. Überlegen Sie sich für jede der folgenden Funktionen f, ob $\int_\Omega f\,d\mu$ existiert, und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert dieses Integrals!

1) $f(\omega) \equiv 5$

2) $f(\omega) = \omega$

3) $f(\omega) = 1 + (2-\omega)^2$

4) Für $\mathbb{R}$ sei ein Maß ν auf der σ-Algebra $\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{R}\big\}$ definiert durch $\nu(\mathbb{Q}) = \frac{1}{10}$ und $\nu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \frac{9}{10}$. Berecchnen Sie $\int_R f\,d\nu$ für die Dirichletsche Sprungfunktion $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ sonst!

5) $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu\big)$ sei der übliche Maßraum für die reellen Zahlen. Was ist $\int_R f\,d\mu$ für die Dirichletsche Sprungfunktion?

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*

In zehn preußischen Kavallerieregimentern wurden über zwanzig Jahre hinweg die jährlichen Todesfälle durch Hufschlag gezählt: 109 mal gab es *keine* Todesfälle, 65 mal einen, 22 mal zwei, dreimal drei und einmal kam es vor, daß ein Regiment während eines Jahres vier Tote zu beklagen hatte. Finden Sie eine Poisson-Verteilung, die diese Zahlen ungefähr beschreiben könnte, und vergleichen Sie die aufgrund dieser Verteilung berechneten Wahrscheinlichkeiten mit den beobachteten Häufigkeiten!

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*

Die Zufallsvariable $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ nehme nur Werte im Intervall $[0, 1]$ ein. Ihre Verteilungsfunktion sei gegeben durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte der Form $f(t) = \gamma t(1-t)$ auf $[0, 1]$ und $f(t) = 0$ sonst mit einer Konstanten $\gamma \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie den Wert von γ!

b) Wie sieht die Verteilungsfunktion von X aus?

c) Welchen Erwartungswert hat X?

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

a) X sei eine Zufallsvariable, die nur natürliche Zahlen als Werte annehme. Zeigen Sie: Dann ist $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$

b) X sei eine positive Zufallsvariable mit Dichtefunktion f und Verteilungsfunktion $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Dann ist $E(X) = \int_0^\infty \big(1 - F(x)\big)\,dx$.

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 6. Juni 2001, um 13.30 Uhr