Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

16. Mai 2001

4. Übungsblatt zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Ist $X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbar bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ der Borel-Mengen, so ist X eine stetige Abbildung.

2) *Richtig oder falsch:* Mit $X: \Omega \to \mathbb{R}$ ist auch $e^X: \Omega \to \mathbb{R};\ \omega \mapsto e^{X(\omega)}$ meßbar.

3) *Richtig oder falsch:* Bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ ist jede Abbildung $X: \Omega \to \mathbb{R}$ meßbar.

4) Welche Abbildungen $X: \Omega \to \mathbb{R}$ sind meßbar bezüglich der trivialen σ-Algebra $\{\emptyset, \Omega\}$?

5) *Richtig oder falsch:* Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ meßbar, so existiert das uneigentliche Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$.

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Jeder Strahler der Laserorgel *SuperDelic 2001* erzeugt alle drei Sekunden einen Lichtblitz, der mit gleicher Wahrscheinlichkeit und unabhängig von seinem Vorgänger eine der Farben rot, blau, grün oder gelb hat.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß vor dem dritten roten Blitz mindestens zehn Blitze in anderen Farben kommen?

b) Ein Besucher wettet, daß der Strahler links außen in den nächsten fünf Minuten mindestens dreißig blaue Blitze abgeben wird. Nach vier Minuten sind 23 blaue Blitze gezählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er seine Wette gewinnt?

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*
Zwei Spieler werfen gleichzeitig je einen Würfel; falls verschiedene Augenzahlen fallen, bezahlt der Spieler mit der niedrigeren Augenzahl eine Mark an den anderen.

a) Beschreiben Sie den Gewinn oder Verlust von Spieler eins durch eine Zufallsvariable auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum!

b) Geben Sie die Verteilungsfunktion dieser Zufallsvariablen explizit an!

c) Das Spiel wird hundertmal wiederholt. Nach der neunzigsten Wiederholung hat Spieler eins insgesamt fünf Mark verloren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er am Ende verlustfrei abschneidet?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Ω sei eine Menge und $X: \Omega \to \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung.

a) Zeigen Sie: Es gibt eine σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ mit der Eigenschaft: X ist genau dann eine Zufallsvariable bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$, wenn $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ ist,

b) Was ist $\mathcal{A}$ für $\Omega = \mathbb{R}$ und $X(\omega) = \omega^3$?

c) Was ist $\mathcal{A}$ für $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ und $X(\omega) = \begin{cases} +1 & \text{für } \omega > 3 \\ -1 & \text{für } \omega \leq 3 \end{cases}$?

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 23. Mai 2001, um 13.30 Uhr