WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

B6, B4.18

25. Mai 2020

11. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie für jede der folgenden Zahlen n alle endlichen abelschen Gruppen der Ordnung n und schreiben Sie diese jeweils als Produkt möglichst weniger zyklischer Gruppen!

a) $n = 12$ *b)* $n = 30$ *c)* $n = 64$

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß eine abelsche Gruppe der Ordnung n zu jedem Teiler m von n mindestens eine Untergruppe der Ordnung m hat!

b) Finden Sie ein Beispiel, bei dem es mehrere solche Untergruppen gibt!

c) Zeigen Sie, daß eine zyklische Gruppe der Ordnung n zu jedem Teiler m von n *genau* eine Untergruppe der Ordnung m hat!

d) Eine natürliche Zahl n heißt quadratfrei, wenn in ihrer Primzerlegung keine Primzahl in einer höheren als der ersten Potenz auftritt. Zeigen Sie, daß in diesem Fall alle abelschen Gruppen der Ordnung n zueinander isomorph sind!

Aufgabe 3: *(2 Punkte)*
Γ sei das Gitter $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ der GAUSSschen Zahlen. Finden Sie eine doppeltperiodische Funktion mit Periodengitter Γ, die genau in den Punkten $n + mi$ und $n + \frac{1}{3} + mi$ mit $n, m \in \mathbb{Z}$ unendlich wird!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*
Man sagt, eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ habe im Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ einen Pol n-ter Ordnung, wenn sie in einer Umgebung von z_0 eine Potenzreihendarstellung der Form

$$f(z) = H(f) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{mit} \quad H(f) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} \quad \text{und} \quad a_{-n} \neq 0$$

hat; die Funktion $H(f)$ heißt der *Hauptteil* von f im Punkt z_0.

a) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty$ sei eine doppeltperiodische Funktion zum Gitter Γ, deren Einschränkung auf $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ eine komplex differenzierbare Funktion $\mathbb{C} \setminus \Gamma \to \mathbb{C}$ sei, und die im Nullpunkt den Hauptteil $1/z^2$ habe. Zeigen Sie, daß f gleich der WEIERSTRASSschen $\wp$-Funktion ist!

b) Was können Sie über f sagen, wenn der Hauptteil im Nullpunkt stattdessen gleich $1/z^n$ ist?

c) Finden Sie zwei doppeltperiodische Funktionen mit einem Pol dritter *bzw.* vierter Ordnung im Nullpunkt, die kein skalares Vielfaches der Funktion $\wp(z)$ oder einer ihrer Ableitungen sind!

Abgabe bis zum Freitag, dem 29. Mai 2020, um 12.00 Uhr