

4. April 2020

7. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1: (8 Punkte)

k sei ein Körper mit von zwei und drei verschiedener Charakteristik.

a) Zeigen Sie: Zwei elliptische Kurven

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3 \quad \text{und} \quad y'^2z = x^3 + a'xz^2 + b'z^3$$

haben genau dann die gleiche j -Invariante, wenn entweder b und b' beide verschwinden oder aber wenn gilt

$$\frac{a^3}{b^2} = \frac{a'^3}{b'^2}.$$

b) Welchen Wert hat a^3/b^2 , wenn die Gleichung keine elliptische Kurve definiert?

c) Zeigen Sie, daß es für jedes $j \in k$ eine elliptische Kurve mit diesem Wert als j -Invariante gibt! (*Hinweis: Da k nicht als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt ist, können Sie nicht erwarten, daß Wurzeln existieren. Versuchen Sie stattdessen, zunächst eine Kurve mit einem vorgegebenen Wert von a^3/b^2 zu finden.*)

d) Zeigen Sie, daß jede elliptische Kurve über \mathbb{Q} eine WEIERSTRASS-Gleichung

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3$$

mit ganzen Zahlen a und b hat!

Aufgabe 2: (6 Punkte)

a) Welche Gleichung hat die HESSEsche Kurve zu einer elliptischen Kurve in WEIERSTRASS-Normalform?

b) Bestimmen Sie eine WEIERSTRASS-Normalform dieser Kurve!

Aufgabe 3: (6 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß die Punkte $P = (0 : -1 : 1)$, $Q = (-1 : 0 : 1)$ und $O = (1 : -1 : 0)$ Wendepunkte der Kurve $x^3 + y^3 + z^3 + \lambda xyz = 0$ sind!

b) Nehmen Sie O als Neutralelement, und bestimmen Sie die Summe $P + Q$!

c) Was ist $2P$?

Abgabe bis zum Freitag, dem 24. April 2020, um 12.00 Uhr