WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

B6, B4.18

28. März 2020

6. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Welche der folgenden Gleichungen definieren in der projektiven Ebene über dem jeweils angegebenen Körper eine elliptische Kurve?

a) $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ über $\mathbb{Q}$
b) $x^3 - z^3 + xy^2 + x^2z - xz^2 - y^2z = 0$ über $\mathbb{R}$
c) $y^2 = x(x^2 + x + 1)$ über $\mathbb{R}$
d) $3x^3 + 4y^3 + 6z^3 = 0$ über $\mathbb{Q}$
e) $xyz + xy^2 + yz^2 = 0$ über $\mathbb{C}$
f) $y^2z = x^3 + 2x^2 + x$ über $\mathbb{R}$

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) Finden Sie alle Punkte auf der Kurve $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_7)$!
b) Finden Sie alle Punkte auf der Kurve $y^2z = x^3 + z^3$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_5)$!
c) Finden Sie alle Punkte auf der Kurve $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

Finden Sie eine WEIERSTRASSsche Normalform für die Kurve $x^3 + y^3 + az^3 = 0$ mit $a \neq 0$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$!
Hinweis: Finden Sie zunächst einen Punkt auf der Kurve und transformieren Sie das Koordinatensystem so, daß dieser zum Punkt $(0 : 1 : 0)$ wird!

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*

Untersuchen Sie für die folgenden rationalen Abbildungen der projektiven Ebene auf sich selbst, wo sie definiert sind und wo sie injektiv sind!

a) $(x : y : z) \mapsto (x : x : z)$
b) $(x : y : z) \mapsto (x^2z : xy^2 : yz^2)$
c) Wie sehen die beiden Abbildungen aus, wenn man sie auf die affine (x, y)-Ebene einschränkt?

Abgabe bis zum Freitag, dem 4. April 2020, um 12.00 Uhr