Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 B6, B4.18

19. März 2020

5. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

a) Wie viele Punkte (in allgemeiner Lage) braucht man, um eine Kurve vom Grad d durch diese Punkte eindeutig festzulegen?

Lösung: Ein Polynom vom Grad d in drei Veränderlichen hat $\binom{d+2}{2}$ Koeffizienten. Die Forderung, daß ein gegebener Punkt in der Nullstellenmenge des Polynoms liegen soll, ist eine homogene lineare Gleichung in diesen Koeffizienten. Mit $\binom{d+2}{2}-1$ Punkten hat man also $\binom{d+2}{2}-1$ homogene Gleichungen in $\binom{d+2}{1}$ Variablen; falls die Punkte in allgemeiner Lage bezüglich Kurven vom Grad d sind, hat die Matrix des Gleichungssystems den maximal möglichen Rang $\binom{d+2}{2}-1$, so daß der Lösungsraum eindimensional ist. Seine von Null verschiedenen Elemente haben als Nullstellenmenge alle die gleiche Kurve vom Grad d.

b) Welche Dimension hat das lineare System aller Kurven vom Grad d mit dem Nullpunkt als r-fachem Punkt für $r = d-1$, $r = d$ und $r = d+1$?

Lösung: Wie aus der Vorlesung bekannt, stellt die Bedingung, daß ein gegebener Punkt mindestens die Vielfachheit r haben soll, $\frac{1}{2}r(r+1)$ linear unabhängige Bedingungen an die Koeffizienten der Kurvengleichung. Das lineare System aller Kurven vom Grad d hat die Dimension $\binom{d+2}{2}-1$, also ist die gesuchte Dimension gleich

$$\binom{d+2}{2}-1-\frac{r(r+1)}{2}=\frac{d(d+3)-r(r+1)}{2}\,,$$

falls diese Zahl nicht negativ ist, und sonst gibt es keine entsprechenden Kurven. Für $r = d-1$ ist das

$$\frac{d(d+3)-d(d-1)}{2}=\frac{4d}{2}=2d\,,$$

für $r = d$

$$\frac{d(d+3)-d(d+1)}{2}=\frac{2d}{2}=d\,,$$

und für $r = d+1$ schließlich ist

$$\frac{d(d+3)-(d+1)(d+2)}{2}=\frac{-2}{2}=-1\,,$$

es gibt also keine solchen Kurven.

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

E und E' seien zwei kubische Kurven, die sich in genau neun Punkten schneiden. Zeigen Sie: Wenn sechs dieser Punkte auf einer (nicht notwendigerweise irreduziblen) Quadrik liegen, liegen die restlichen drei auf einer Geraden.

Lösung: Falls die Quadrik irreduzibel ist, folgt dies aus dem Satz der Vorlesung, wonach für zwei Kurven vom Grad d mit d^2 Schnittpunkten, von denen de auf einer irreduziblen

Kurve vom Grad e liegen, die restlichen Schnittpunkte auf einer Kurve vom Grad $d-e$ liegen.

Ist die Quadrik reduzibel, so ist sie die Vereinigung zweier Geraden. Auf jeder dieser Geraden können höchstens drei der Schnittpunkte liegen, denn sonst wäre die Gerade nach dem Satz von BÉZOUT eine gemeinsame Komponente der beiden Kurven, es gäbe also mehr als neun Schnittpunkte. Somit liegen auf jeder Geraden genau drei Schnittpunkte.

Wir können dann den zitierten Satz anwenden auf eine der beiden Geraden, denn Geraden sind irreduzible Kurven. Wir wissen daher, daß die übrigen sechs Schnittpunkte auf einer Quadrik liegen. Drei davon liegen auch auf der anderen Geraden, d.h. diese hat mindestens drei Schnittpunkte mit der Quadrik und muß daher eine Komponente sein, d.h. die Quadrik ist Vereinigung dieser Geraden mit einer zweiten. Auf dieser müssen dann die noch fehlenden drei Schnittpunkte liegen.

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die HESSEsche zur Kurve

$$V(X^3+Y^3+Z^3+\lambda XYZ)\subset\mathbb{P}^2(k)\quad\text{mit}\quad\lambda\in k$$

für $\lambda\neq 0$ wieder eine Kurve von dieser Form ist!

Lösung: Zur Berechnung der HESSEschen Determinanten brauchen wir zunächst die zweiten partiellen Ableitungen von $F=X^3+Y^3+Z^3+\lambda XYZ$. Leiten wir zweimal nach derselben Variablen ab, verschwindet die Ableitung von XYZ, leiten wir nach zwei verschiedenen Variablen ab, so verschwinden die Ableitungen der dritten Potenzen. Die Determinante ist somit

$$\begin{vmatrix} 6X & \lambda Z & \lambda Y\\ \lambda Z & 6Y & \lambda X\\ \lambda Y & \lambda X & 6Z\end{vmatrix} = 6^3XYZ+\lambda^3XYZ+\lambda^3YZX-6\lambda^2X^3-6\lambda^2Z^3-6\lambda^2Y^3\,.$$

Die HESSEsche ist somit die Nullstellenmenge von

$$X^3+Y^3+Z^3-\frac{6^3+\lambda^3}{6\lambda^2}XYZ\,.$$

b) Was ist die HESSEsche im Fall $\lambda=0$?

Lösung: In diesem Fall verschwinden alle gemischten partiellen Ableitungen, die Determinante ist also gleich 6^3XYZ, und die HESSESCHE ist die Vereinigung der drei Koordinatenachsen der projektiven Ebenen.

Aufgabe 4: *(8 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Wendepunkte der Kurve $V\big(Y^2Z-(X^3+Z^3)\big)\subset\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$!

Lösung: Die Wendepunkte sind die Schnittpunkte mit der HESSEschen; da alle Koeffizienten der Kurvengleichung plus oder minus eins sind, können wir die unabhängig vom Körper berechnen.

Wir brauchen die zweiten partiellen Ableitungen von $Y^2Z-X^3-Y^3$, erhalten also die Determinante

$$\begin{vmatrix} -6X & 0 & 0\\ 0 & 2Z & 2Y\\ 0 & 2Y & 0\end{vmatrix} = -6X\begin{vmatrix} 2Z & 2Y\\ 2Y & -6Z\end{vmatrix} = -6X(-12Z^2-4Y^2)=24X(Y^2+3Z^2)\,.$$

Die HESSEsche zerfällt also in eine Gerade und eine Quadrik.

Wir wollen ihre Schnittpunkte mit der Kurve berechnen.

Für einen Schnittpunkt $(x : y : z)$ auf der Geraden $V(X)$ gilt $y^2 z = z^3$, d.h. entweder ist $z = 0$ oder $y^2 = z^2$. Der einzige Punkt mit $z = 0$ auf der Kurve ist $(0 : 0 : 1)$, und mit $x = 0$, $y^2 = z^2$ gibt es die beiden Punkte $(1 : 1 : 0)$ und $(1 : -1 : 0)$.

Für die Schnittpunkte mit der Quadrik $y^2 + 3z^2 = 0$ können wir affin rechnen, denn der einzige unendlich ferne Punkt $(0 : 1 : 0)$ der kubischen Kurve liegt nicht auf dieser Quadrik. Wir beschränken uns daher auf die affine (x, y)-Ebene, wo die Kurvengleichung zu $y^2 = x^3 + 1$ wird, und die der Quadrik zu $y^2 = -3$. Setzen wir dies ein in die Kurvengleichung, erhalten wir die Gleichung $x^3 = -4$.

Ab hier setzen wir voraus, daß es in dieser Teilaufgabe um den Körper der komplexen Zahlen geht. Dort hat die Gleichung $y^2 = -3$ die beiden Lösungen $y = \pm\sqrt{-3}$, und $x^3 = -4$ hat drei komplexe Lösungen. Somit gibt es insgesamt neun Wendepunkte.

b) Bestimmen Sie alle Wendepunkte der Kurve $V\big(Y^2 Z - (X^3 + Y^3)\big) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_5)$!

Lösung: Hier wird die Gleichung $y^2 = -3$ zu $y^2 = 2$. In $\mathbb{F}_5$ ist $1^2 = 4^2 = 1$ und $2^2 = 3^2 = 4$, es gibt also keine Lösung dieser Gleichung. Somit gibt es hier nur drei Wendepunkte.

c) Bestimmen Sie alle Wendepunkte der Kurve $V\big(Y^2 Z - (X^3 + Y^3)\big) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_{11})$!

Lösung: Hier wird $y^2 = -3$ zur Gleichung $y^2 = 8$. In $\mathbb{F}_{11}$ ist $1^2 = 10^2 = 1$, $2^2 = 9^2 = 4$, $3^2 = 8^2 = 9$, $4^2 = 7^2 = 5$, $5^2 = 6^2 = 3$; somit gibt es auch hier keine Lösung.