

19. März 2020

5. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1: (4 Punkte)

- a) Wie viele Punkte (in allgemeiner Lage) braucht man, um eine Kurve vom Grad d durch diese Punkte eindeutig festzulegen?
- b) Welche Dimension hat das lineare System aller Kurven vom Grad d mit dem Nullpunkt als r -fachem Punkt für $r = d - 1$, $r = d$ und $r = d + 1$?

Aufgabe 2: (4 Punkte)

E und E' seien zwei kubische Kurven, die sich in genau neun Punkten schneiden. Zeigen Sie: Wenn sechs dieser Punkte auf einer (nicht notwendigerweise irreduziblen) Quadrik liegen, liegen die restlichen drei auf einer Geraden.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

- a) Zeigen Sie, daß die HESSEsche zur Kurve

$$V(X^3 + Y^3 + Z^3 + \lambda XYZ) \subset \mathbb{P}^2(k) \quad \text{mit } \lambda \in k$$

für $\lambda \neq 0$ wieder eine Kurve von dieser Form ist!

- b) Was ist die HESSEsche im Fall $\lambda = 0$?

Aufgabe 4: (8 Punkte)

- a) Bestimmen Sie alle Wendepunkte der Kurve $V(Y^2Z - (X^3 + Z^3)) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$!
- b) Bestimmen Sie alle Wendepunkte der Kurve $V(Y^2Z - (X^3 + Y^3)) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_5)$!
- c) Bestimmen Sie alle Wendepunkte der Kurve $V(Y^2Z - (X^3 + Y^3)) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_{11})$!

Abgabe bis zum Freitag, dem 27. März 2020, um 12.00 Uhr