

16. März 2020

4. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Die Kurve $C \subset \mathbb{P}^2(k)$ sei gegeben durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2)z^2 = 0$$

mit einem Parameter $a \in k$, k algebraisch abgeschlossener Körper.

- Bestimmen Sie die Schnittpunkte von C mit der Geraden $z = 0$!
- In welchen Punkten hat C eine Tangente der Form $x = \lambda z$, in welchen eine der Form $y = \lambda z$?
- Bestimmen Sie die Tangente(n) an C im Punkt $(0 : 0 : 1)$!

Aufgabe 2: (8 Punkte)

- Welche Gleichung(en) muß das Koeffizientenpaar

$$((a_1 : b_1 : c_1), (a_2 : b_2 : c_2)) \in \mathbb{P}^2(k) \times \mathbb{P}^2(k)$$

erfüllen, damit das lineare Gleichungssystem

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0 \quad \text{und} \quad a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

einen zweidimensionalen Lösungsraum hat?

- Zeigen Sie, daß sich $\mathbb{P}^2(k) \times \mathbb{P}^2(k)$ einbetten läßt in $\mathbb{P}^8(k)$, indem das Punktepaar aus $(a_1 : a_2 : a_3)$ und $(b_1 : b_2 : b_3)$ abgebildet wird auf den Punkt mit Koordinaten $c_{ij} = a_i b_j$ für $i, j = 1, 2, 3$!
- Welche Polynome verschwinden auf dem Bild dieser Einbettung?
- Welche weiteren Polynome verschwinden in den Bildern jener Punkte, die die Bedingung aus a) erfüllen?

Aufgabe 3: (2 Punkte)

Welche Gleichung(en) müssen die Koordinaten dreier Punkte aus \mathbb{P}^2 erfüllen, wenn die drei Punkte bezüglich Geraden nicht in allgemeiner Lage sind?

Aufgabe 4: (4 Punkte)

\mathcal{L}_d sei das lineare System aller Kurven vom Grad $d \geq 1$ in $\mathbb{P}^2(k)$. Zeigen Sie, daß es im projektiven Raum \mathcal{L}_d endlich viele Hyperflächen (d.h. Nullstellenmengen eines homogenen Polynoms in den Koordinaten) gibt, so daß jeder Divisor $D \in \mathcal{L}_d$, der *nicht* die Form $D = C$ hat mit einer irreduziblen Kurve C vom Grad d , auf mindestens einer dieser dieser Hyperflächen liegt!

Abgabe bis zum Freitag, dem 19. März 2020, um 12.00 Uhr