WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

B6, B4.18

6. März 2020

3. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

Zeigen Sie:

a) Jedes Polynom $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ läßt sich in eindeutiger Weise als Summe homogener Polynome verschiedener Grade darstellen.

b) Jeder Teiler eines homogenen Polynoms ist selbst homogen.

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) Zerlegen Sie das Polynom $F = X^4Y^2 - 6X^3Y^3 + 11X^2Y^4 - 6XY^5 \in \mathbb{Z}[X, Y]$ in seine irreduziblen Bestandteile!

b) Bestimmen Sie die Nullstellen von $G = X^2Y^3(3X-2Y)(5X-10Y)(4Y-6X)(Y-3X) \in \mathbb{Z}[X, Y]$ in $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$!

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

Zeigen Sie, daß sich jedes homogene Polynom $F \in \mathbb{R}[X, Y]$ als Produkt linearer und quadratischer homogener Polynome aus $\mathbb{R}[X, Y]$ schreiben läßt!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Resultante der beiden homogenen Polynome

$$f = 2XY + 3Y^2 \quad \text{und} \quad g = 4X^2 + 5XY\,!$$

b) Berechnen Sie $\mathrm{Res}_X(f, g)$, wobei f und g als Polynome in X über $\mathbb{Z}[Y]$ aufgefaßt werden sollen.

c) Berechnen Sie $\mathrm{Res}_Y(f, g)$, wobei f und g als Polynome in Y über $\mathbb{Z}[X]$ aufgefaßt werden sollen!

Aufgabe 5: *(3 Punkte)*

$R = k[T]$ sei der Polynomring in einer Veränderlichen T.

a) $f, g \in R[X]$ seien zwei Polynome. Für welche $t \in k$ ist

$$\mathrm{Res}_X(f, g)(t) = \mathrm{Res}_X\big(f(t, X), g(t, X)\big)\ ?$$

b) $f, g \in R[X, Y]$ seien zwei homogene Polynome. Für welche $t \in k$ ist

$$\mathrm{Res}(f, g)(t) = \mathrm{Res}\big(f(t, X, Y), g(t, X, Y)\big)\ ?$$

Abgabe bis zum Freitag, dem 13. März 2020, um 12.00 Uhr