WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

B6, B4.18

28. Februar 2020

2. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie Schnittpunkte der Kurve $C = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x^3 + y^3 = z^3\}$ mit den angegebenen Geraden und berechnen Sie deren Vielfachheiten!

a) $g_1 = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x + y = z\}$

b) $g_2 = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x = z\}$

c) $g_3 = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x = 0\}$

Aufgabe 2: *(2 Punkte)*
Schreiben Sie das Polynom

$$f = X^2Y^3 + 3XY^3 + 2X^3Y + 5X^2Y^2 + XY + Y + 1$$

aus $\mathbb{Q}[X, Y]$ um als nach X- *bzw.* Y-Potenzen sortiertes Polynom aus $\mathbb{Q}[Y][X]$ *bzw.* $\mathbb{Q}[X][Y]$!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Resultante des Polynoms $X^2 + pX + q \in \mathbb{R}[X]$ mit seiner Ableitung!

b) Welche Bedingung müssen p und q erfüllen, damit das Polynom dritten Grades X^3+pX+q eine mehrfache Nullstelle hat?

c) Was muß gelten, wenn es sogar eine dreifache Nullstelle hat?

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*
Bestimmen Sie die Resultante der Polynome $X^2 + XY + Y^3$ und $Y + 2X$ bezüglich X !

Aufgabe 5: *(5 Punkte)*

$$f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1}Y + \cdots + a_1XY^{n-1} + a_0Y^n$$

und

$$g = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1}Y + \cdots + b_1XY^{m-1} + b_0Y^m$$

seien zwei homogene Polynome, wobei weder a_n noch b_m von Null verschieden sein muß. Wir definieren die Resultante von f und g als Determinante der $(n + m) \times (n + m)$ SYLVESTER-Matrix zu den Koeffizienten a_i und b_j. Zeigen Sie, daß f und g genau dann einen gemeinsamen Faktor positiven Grades haben, wenn diese Resultante verschwindet! Was passiert, wenn $a_n = b_m = 0$ ist?

Abgabe bis zum Freitag, dem 6. März 2020, um 12.00 Uhr