Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.18

21. Februar 2020

1. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie in der projektiven Ebenen $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ die Schnittmenge der beiden Geraden $x + 2y + 3z = 0$ und $2x + 3y + 5z = 0$!

b) Zeigen Sie, daß zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ stets genau einen Schnittpunkt haben!

c) Gilt dies auch für Geraden in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

Die affine Ebene $\mathbb{R}^2$ sei durch die Abbildung $(x, y) \mapsto (x : y : 1)$ in die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ eingebettet.

a) Finden Sie zwei projektive ebene Kurven, die die Bilder der beiden Geraden $y = 2x + 1$ und $y = 2x + 3$ enthalten, und bestimmen Sie die Schnittmenge dieser beiden Kurven!

b) Finden Sie eine projektive ebene Kurve, die das Bild der Lemniskate

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 - x^2 + y^2 = 0\}$$

enthält! Welche zusätzlichen Punkte enthält sie?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sei gegeben durch die Vorschrift

$$\varphi\big((s : t)\big) = (st^2 : t^3 : s^3)\,.$$

Zeigen Sie, daß φ die projektive Gerade bijektiv abbildet auf eine ebene Kurve $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, und skizzieren Sie diese!

b) Beschreiben Sie die Umkehrabbildung $\psi\colon C \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ durch Funktionen in den Koordinaten $x : y : z$ der projektiven Ebenen!

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Finden Sie eine Kurve $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, die in der affinen (x, y)-Ebene mit der Hyperbel $xy = 1$ übereinstimmt!

b) Zeigen Sie, daß diese Kurve irreduzibel ist!

c) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von C mit den drei Koordinatenachsen $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ sowie deren Vielfachheiten!

Abgabe bis zum Freitag, dem 28. Februar 2020, um 12.00 Uhr