Wendepunkte

Wendepunkte sind vielleicht von der Kurvendiskussion aus der Schule bekannt; wir betrachten sie hier für projektive ebene Kurven, denn wie sich zeigen wird, spielen sie auf elliptischen Kurven eine wichtige Rolle.

Beginnen wir mit einem Beispiel: Wir betrachten die beiden Kurven

$$y = x^3 \quad \text{und} \quad \begin{aligned} y &= (x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3) \\ &= x^3 - (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)x^2 + (\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\varepsilon_2\varepsilon_3)x - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \end{aligned}$$

in der affinen Ebenen, wobei die ε_i paarweise verschieden und ungleich Null sein sollen.

Die Kurve $y = x^4$ hat in $(0,0)$ die x-Achse $y = 0$ als Tangente. Setzen wir $y = 0$ in die Kurvengleichung ein, erhalten wir die Gleichung $x^3 = 0$, d.h. die x-Achse schneidet die Kurve im Punkt $(0,0)$ mit Vielfachheit drei. Trotzdem ist $(0,0)$ kein singulärer Punkt der Kurve, denn diese ist ja die Nullstellenmenge des Polynoms $Y - X^3$, dessen partielle Ableitung nach Y im Nullpunkt wie auch in jedem anderen Punkt gleich eins ist.

Die zweite Kurve hat in den Punkten $(\varepsilon_i, 0)$ Tangenten mit Steigung $m = 3\varepsilon_i^2 - 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\varepsilon_i + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3$. Läßt man alle drei ε_i gegen Null gehen, fallen diese drei Tangenten zusammen und werden zur x-Achse. Durch diesen Grenzübergang kommen wir also zur ersten Kurve, und ihre Tangente im Nullpunkt entsteht durch das Zusammenfallen verschiedener Tangenten der zweiten Kurve, so daß wir hier von einer mehrfachen Tangente sprechen können. Punkte mit solchen mehrfachen Tangenten bezeichnen wir, sofern sie nicht singulär sind, als Wendepunkte:

Definition: Ein gewöhnlicher Punkt P einer ebenen Kurve $C \subset \mathbb{P}^2(k)$ heißt *Wendepunkt,* wenn seine Tangente keine Komponente von C ist und die Schnittmultiplizität von C mit dieser Tangente im Punkt P mindestens drei ist. Genauer reden von einem r-fachen Wendepunkt, wenn diese Schnittmultiplizität gleich $r + 2$ ist.

Zur Bestimmung der Wendepunkte einer ebenen Kurve ist die sogenannte HESSEsche Kurve nützlich:

Definition: $C = V(F) \subset \mathbb{P}^2(k)$ sei eine ebene Kurve, die nicht vollständig in Geraden zerfällt. Die HESSEsche-Kurve $H_C \subset \mathbb{P}^2(k)$ ist die Nullstellenmenge der HESSEschen Determinanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix} .$$

Ist $d = \deg F$ der Grad von F, so hat jede der partiellen Ableitungen von F den Grad $d-2$, die HESSEsche ist also ein homogenes Polynom vom Grad $3(d-2)$ oder das Nullpolynom.

Für ein quadratisches Polynom F gibt es (falls die Charakteristik des Grundkörpers nicht zwei ist) stets eine symmetrische Matrix $A \in k^{3\times 3}$, so daß

$$F(X,Y,Z) = (X\ Y\ Z) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

ist. Die Determinante von A verschwindet genau dann, wenn die Quadrik $V(F)$ in zwei Geraden zerfällt. Nachrechnen zeigt, daß A einhalb mal der HESSE-Matrix ist, d.h. für eine nichtzerfallende Quadrik ist die Determinante ungleich Null. HESSE hat allgemein gezeigt, daß seine Determinante für ein homogenes Polynoms $F \in k[X,Y,Z]$ genau dann identisch verschwindet, wenn F in ein Produkt von Linearfaktoren zerfällt. In allen anderen Fällen ist H_C somit für eine Kurve C vom Grad d eine Kurve vom Grad $3(d-2)$. Speziell für eine Kurve vom Grad $d = 3$ hat auch deren HESSEsche Kurve den Grad drei.

Satz: C sei eine Kurve, die keine Geraden als Komponente enthält. Ein Punkt $P \in C$ ist genau dann ein r- facher Wendepunkt von C, wenn sich C und H_C in P mit Schnittmultiplizität r schneiden.

Beweis: Wir wählen das Koordinatensystem so, daß $P = (0:0:1)$ ist, und daß C dort die Gerade $y = 0$ als Tangente hat. Wir betrachten im Augenblick nur Punkte mit $z = 1$ und können daher mit affinen Koordinaten x und y rechnen. In der affinen (x,y)-Ebene habe der dort liegende Teil von C die Gleichung $f(x,y) = 0$.

Da der Nullpunkt auf C liegt, ist $f(0,0) = 0$; daher hat f keinen konstanten Koeffizienten. Wir nehmen an, die Gerade $y = 0$ schneide C in $(0,0)$ mit Vielfachheit $r+2$ für ein $r \in \mathbb{N}_0$. Dann können wir f schreiben als

$$f = Yu + X^{r+2}v \qquad \text{mit} \qquad u \in k[X,Y] \text{ und } v \in k[X]\,.$$

(Alle Monome von f, in denen ein Y vorkommt, können im Term Yu gesammelt werden.) Damit die x-Achse die Kurve im Nullpunkt mit Vielfachheit $r+2$ schneidet, muß dabei $u(0,0) \neq 0$ und $v(0) \neq 0$ sein.

Gehen wir zurück zur projektiven Ebenen, müssen wir diese Gleichung homogenisieren und erhalten

$$F(X,Y,Z) = YU + X^{r+2}V \text{ mit } U \in k[X,Y,Z] \text{ und } V \in k[X,Z]\,.$$

Da $u(0,0)$ nicht verschwindet, ist $U(0,0,1) \neq 0$, und wegen $v(0) \neq 0$ ist $V(0,1) \neq 0$. Die partiellen Ableitungen von F sind

$$\begin{aligned}
F_X &= YU_X + X^{r+2}V_X + (r+2)X^{r+1}V\\
F_Y &= U + YU_Y\\
F_Z &= YU_Z + X^{r+2}V_Z\\
F_{XX} &= YU_{XX} + X^{r+2}V_{XX} + 2(r+2)X^{r+1}V_X + (r+1)(r+2)X^rV\\
F_{XY} = F_{YX} &= YU_{XY} + U_X\\
F_{XZ} = F_{ZX} &= YU_{XZ} + X^{r+2}V_{XZ} + (r+2)X^{r+1}V_Z\\
F_{YZ} = F_{ZY} &= U_Z + YU_{YZ}\\
F_{ZZ} &= YU_{ZZ} + X^{r+2}V_{ZZ}
\end{aligned}$$

Da $V(0,1)$ nicht verschwindet, ist $V(X,Z)$ nicht durch X teilbar, d.h. die kleinste in F_{XX} vorkommende reine X-Potenz ist X^r. In den anderen zweiten partiellen Ableitungen kommen, wenn überhaupt höchstens höhere reine X-Potenzen vor. Daher läßt sich die Determinante der HESSE-Matrix schreiben als

$$D = YW + X^rS$$

mit homogenen Polynomen $W \in k[X,Y,Z]$ und $S \in k[X,Z]$.

Als nächstes wollen wir die Schnittmultiplizität von C und H_C in P bestimmen. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: $r = 0$. Das ist genau dann der Fall, wenn $P = (0 : 0 : 1)$ kein Wendepunkt von C ist. Setzen wir seine Koordinaten in D ein, erhalten wir

$$D(0,0,1) = YW(0,0,1) + X^r S(0,1) = S(0,1) \neq 0\,,$$

da $Y = 0$ und $X^0 = 1$ ist. Also liegt $(0 : 0 : 1)$ nicht auf der HESSEschen von C, falls dieser Punkt kein Wendepunkt von C ist.

2.Fall: $r > 0$. Jetzt liegt $P = (0 : 0 : 1)$ auf H_C. Wir wollen zeigen, daß die Schnittmultiplizität von C und H_C in P gleich r ist.

Dazu wählen wir das Koordinatensystem noch etwas spezieller als bisher: Der Punkt P soll weiterhin die Koordinaten $(0 : 0 : 1)$ haben, und die Tangente an C in diesem Punkt sei weiterhin die x-Achse. Zusätzlich sollen die Koordinaten noch so gewählt sein, daß der Punkt $(0 : 1 : 0)$ auf keiner Verbindungsgeraden zweier Schnittpunkte von C und H_C liegt.

Wir betrachten die Resultante $\mathrm{Res}_Y(F,D) \in k[X,Z]$. Dazu müssen wir F und D als Polynome in Y mit Koeffizienten aus $k[X,Z]$ auffassen; die bezüglich dieser Darstellung konstanten Terme von F und D sind nach den obigen Formeln $X^{r+2}V$ und $X^r S$. Diese Polynome stehen daher in der letzten Spalte der SYLVESTER-Matrix und sind dort die einzigen von Null verschiedenen Einträge. Entwickeln wir die Determinante nach der letzten Spalte, erhalten wir also eine Darstellung

$$\mathrm{Res}_Y(F,D) = X^{r+2}VP + X^r SQ$$

mit geeigneten Polynomen $P,Q \in k[X,Z]$. Dabei ist Q die Determinante jener Untermatrix der SYLVESTER-Matrix, die durch Streichen der letzten Spalte und der letzten Zeile entsteht, Setzt man darin $X = 0$ und $Z = 1$, erhält man für $Q(0,1)$ die Resultante von $U(0,Y,1)$ und $YW(0,Y,1)$. Wäre diese gleich Null, so hätten die beiden Polynme eine gemeinsame Nullstelle y_0, d.h. der Punkt $(0 : y_0 : 1)$ wäre eine Schnittpunkt von C mit H_C. Das ist aber nicht möglich, denn auch $P = (0 : 0 : 1)$ ist ein Schnittpunkt, und der Punkt $(0 : 1 : 0)$ liegt auf der

Verbindungsgerade dieser beiden Schnittpunkte, was wir bei der Wahl des Koordinatensystems ausgeschlossen haben. Somit ist $Q(1,0) \neq 0$.

Da auch $S(0,1)$ nicht verschwindet, ist X^r die höchste X-Potenz, die $\mathrm{Res}_Y(F,D)$ teilt; die Resultante hat für P also eine r-fache Nullstelle, d.h. die Schnittmultiplizität von C und H_C im Punkt P ist gleich r. ∎

Satz: k sei ein algebraisch abgeschlossener Körper, und C sei eine nichtsinguläre ebene Kurve vom Grad $d \geq 3$ in $\mathbb{P}^2(k)$. Dann hat C mit Vielfachheiten gezählt $3d(d-2)$ Wendepunkte.

Beweis: H_C ist eine Kurve vom Grad $3(d-2)$, die nach dem vorherigen Satz keine Komponente mit C gemeinsam hat. Also gibt es nach dem Satz von BÉZOUT mit Vielfachheiten gezählt $3d(d-2)$ Schnittpunkte, und die sind nach dem gerade bewiesenen Satz Wendepunkte von C mit derselben Vielfachheit. ∎