Kurven durch vorgegebene Punkte

Der Satz von BÉZOUT sagt uns etwas über die Schnittpunkte zweier Kurven. Zum Verständnis der Geometrie ebener Kurven müssen wir uns gelegentlich auch mit dem umgekehrten Problem beschäftigen: Gegeben sind endlich viele Punkte der projektiven Ebene; wir suchen Kurven, die (eventuell mit einer gewissen Vielfachheit) durch diese Punkte gehen.

Die Kurve $C = V(F)$ mit $F \in k[X,Y,Z]$ geht genau dann durch den Punkt $(x:y:z) \in \mathbb{P}^2(k)$, wenn $F(x,y,z) = 0$ ist, und die homogenen Polynome F eines festen Grades d, die diese Bedingung erfüllen, bilden einen endlichdimensionalen Untervektorraum von $k[X,Y,Z]$. Leider stehen aber Kurven und Polynome nicht in einer eindeutigen Beziehung: Zunächst haben für jedes $\lambda \in k^\times$ die Polynome F und λF dieselbe Nullstellenmenge – was kein großes Problem ist, da wir einfach vom Vektorraum zum zugehörigen projektiven Raum übergehen können. Ein größeres Problem ist beispielsweise das folgende:

Angenommen, F und G sind zwei teilerfremde homogene quadratische Polynome aus $k[X,Y,Z]$. Dann sind F^2G und FG^2 beide homogene Polynome vom Grad sechs und haben auch beide dieselbe Nullstellenmenge, sind aber ausmultipliziert zwei sehr verschiedene Polynome und insbesondere nicht proportional zueinander. Um diesem Problem zu begegnen, erweitern wir formal den Kurvenbegriff:

Definition: *a)* Ein *Divisor* in der projektiven Ebenen $\mathbb{P}^2(k)$ ist eine formale Linearkombination

$$D = \sum_{i=1}^{r} a_i C_i$$

von irreduziblen Kurven $C_i \subset \mathbb{P}_2(k)$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$.
b) Der Divisor heißt *effektiv,* wenn alle a_i positiv sind.
c) Ist $C_i = V(F_i)$ mit einem irreduziblen Polynom F_i vom Grad d_i, so bezeichnen wir

$$\deg D = \sum_{i=1}^{r} a_i d_i$$

als den *Grad* des Divisors D.

Für ein homogenes Polynom $F \in k[X, Y, Z]$ können wir nun seine Zerlegung $F = cF_1^{e_1} \cdots F_r^{e_r}$ betrachten und ihm statt seiner Nullstellenmenge $V(F)$ den Divisor

$$D = \sum_{i=1}^{r} e_i C_i \qquad \text{mit} \qquad C_i = V(F_i)$$

zuordnen. Im obigen Beispiel zweier teilerfremder irreduzibler quadratischer Polynome F, G mit $V(F) = C$ und $V(G) = C'$ betrachten wir also zu F^2G den Divisor $2C + C'$, zu FG^2 aber den davon verschiedenen Divisor $C + 2C'$.

Das Polynom $F = cF_1^{e_1} \cdots F_r^{e_r}$ hat den Grad $\sum_{i=1}^{r} e_i \deg F_i$, und da der Grad der Kurve $C_i = V(F_i)$ gleich dem von F_i ist, hat auch der Divisor $D = \sum_{i=}^{r} e_i C_i$ diesen Grad.

Ein homogenes Polynom vom Grad d ist eine Linearkombination von Monomen $X^iY^jZ^\ell$ mit $i + j + \ell = d$, und natürlich müssen alle Exponenten größer oder gleich Null sein. Für i gibt es daher die $d + 1$ Möglichkeiten $i = 0$ bis $i = d$, und für j gibt es dann noch die $d - i + 1$ Möglichkeiten $j = 0$ bis $j = d - i$. Der dritte Exponent $\ell = d - i - j$ ist durch die beiden ersten eindeutig festgelegt. Die Anzahl möglicher Monome ist somit

$$\sum_{i=0}^{d} (d - i + 1) = \sum_{i=1}^{d+1} i = \frac{(d + 1)(d + 2)}{2} = \binom{d + 2}{2} ;$$

die homogenen Polynome vom Grad d in X, Y, Z bilden also zusammen mit dem Nullpolynom einen Vektorraum der Dimension $\binom{d+2}{2}$.

Da wir für $\lambda \in k^\times$ den Polynomen F und λF denselben Divisor zuordnen, gehen wir über zum projektiven Raum zu diesem Vektorraum:

Definition: Das *lineare System* der effektiven Divisoren vom Grad d ist der projektive Raum zum Vektorraum aller Polynome vom Grad d.

Die Dimension dieses linearen Systems ist somit $\binom{d+2}{2} - 1$.

Wir interessieren uns im folgenden für projektive Unterräume dieses Systems, deren Elemente durch gewisse Bedingungen festgelegt sind, meist dadurch, daß die Kurven mit einer gewissen Mindestvielfachheit durch vorgegebene Punkte gehen sollen. Die Vielfachheit definieren wir für Divisoren in der offensichtlichen Weise:

Definition: Ein Punkt $P \in \mathbb{P}^2(k)$ heißt ein m-facher Punkt des effektiven Divisors $D = \sum_{i=1}^r a_i C_i$, wenn für seine Vielfachheiten m_i auf den Kurven C_i gilt, daß $\sum_{i=1}^r a_i m_i = m$ ist. Falls P nicht auf C_i liegt, soll dabei $m_i = 0$ sein.

Sind $F_i \in k[X, Y, Z]$ irreduzible homogene Polynome mit $V(F_i) = C_i$, so ist D der Divisor zum Produkt F der $F_i^{e_i}$; falls $P = (x : y : z)$ ein m-facher Punkt von D ist, muß also (x, y, z) eine m-fache Nullstelle von F sein, d.h. für $m \geq 1$ muß $F(x, y, z)$ verschwinden, und für $m > 1$ zusätzlich noch alle partiellen Ableitungen bis zu den $(m-1)$-ten: Für irreduzible Polynome *bzw.* Kurven haben wir die Vielfachheit so definiert, und für ein Produkt zweier Polynome folgert man leicht aus der Produktregel für die Ableitung, daß gilt:

Verschwindet das Polynom F sowie alle seine partiellen Ableitungen bis zu den $(m-1)$-ten im Punkt $(x : y : z)$, und verschwindet dort G sowie alle seine partiellen Ableitungen bis zu den $(n-1)$-ten, so verschwindet FG zusammen mit allen seinen partiellen Ableitungen bis zu den $(m+n-1)$-ten in $(x : y : z)$.

Daraus folgt dann induktiv die Behauptung für $F = F_1^{e_1} \cdots F_r^{e_r}$.

Betrachten wir speziell den Punkt $P = (0 : 0 : 1)$, so liegt dieser genau dann auf dem zu F gehörigen Divisor D, wenn $F(0, 0, 1) = 0$ ist, wenn also der Koeffizient des Monoms Z^d verschwindet – alle anderen Monome verschwinden dort schließlich automatisch.

Bei der partiellen Ableitung nach X verringert sich der X-Grad eines jeden Monoms um eins; bei der nach Y entsprechend der Y-Grad. Für einen m-fachen Punkt müssen daher die Koeffizienten aller Monome $X^i Y^j Z^{d-i-j}$ mit $i + j < m$ verschwinden, denn

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial X^i \partial Y^j} X^i Y^j Z^{d-i-j} = i!\, j! Z^{d-i-j} .$$

Die Anzahl der Monome $X^iY^jZ^{d-i-j}$ mit $i+j<m\le d$ können wir genauso abzählen wie oben die Anzahl aller Monome vom Grad d: Für i gibt es die m Möglichkeiten $i=0$ bis $i=m-1$, und für j die $m-i$ Möglichkeiten $j=0$ bis $j=m-i-1$, insgesamt also

$$\sum_{i=0}^{m-1}(m-i)=\sum_{i=1}^{m}i=\frac{m(m+1)}{2}=\binom{m}{2}\,.$$

Falls wir an einen effektiven Divisor vom Grad d die Bedingung stellen, daß er den Punkt $(0:0:1)$ mit Vielfachheit m enthalten soll, müssen also $\binom{m}{2}$ Koeffizienten des zugehörigen Polynoms F verschwinden.

Da wir durch einen linearen Koordinatenwechsel in $\mathbb{P}^2(k)$ stets erreichen können, daß ein gegebener Punkt P die Koordinaten $(0:0:1)$ bekommt, heißt das

Lemma: Die Bedingung, daß ein Divisor vom Grad d einen Punkt $P\in\mathbb{P}^2(k)$ mit Vielfachheit mindestens $m\le d$ enthalten soll, stellt $\binom{m}{2}$ lineare Bedingungen an die Koeffizienten des zugehörigen Polynoms $F\in k[X,Y,Z]$; der entsprechende projektive Unterraum des linearen Systems aller Divisoren vom Grad d hat also die Dimension

$$\binom{d+2}{2}-1-\binom{m}{2}\,.$$

■

Sind nun s verschiedene Punkte $P_1,\dots,P_s$ gegeben und zu jedem dieser Punkte eine Vielfachheit $m_i\in\mathbb{N}$, so liegt ein Punkt P_i genau dann mit Vielfachheit mindestens m_i auf D, wenn $\binom{m_i}{2}$ lineare Bedingungen erfüllt sind. Fordern wir, daß D jeden der Punkte P_i mit Vielfachheit mindestens m_i enthält, müssen alle diese Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein.

So lange wir uns auf einen einzigen Punkt P_i beschränken, sind die $\binom{m_i}{2}$ Bedingungen dazu linear unabhängig, denn im Koordinatensystem, in dem $P_i=(0:0:1)$ ist, bestehen sie ja im Verschwinden verschiedener Koeffizienten eines Polynoms. Sobald wir mehrere Punkte betrachten, können wir allerdings nicht mehr sicher sein, daß keine linearen Abhängigkeiten zwischen den Bedingungen bestehen; wir können

daher nur sagen, daß der zugehörige projektive Unterraum *mindestens* die Dimension
$$\binom{d+2}{2} - 1 - \sum_{i=1}^{s} \binom{m_i}{2}$$
hat.

Wenn die Dimension größer ist, sollte dies etwas mit der speziellen Lage der Punkte $P_1, \ldots, P_s$ zu tun haben; wir definieren daher

Definition: s Punkte $P_1, \ldots, P_s \in \mathbb{P}^2(k)$ sind *in allgemeiner Lage* bezüglich Divisoren vom Grad d, wenn das lineare System aller Divisoren vom Grad d, die durch $P_1, \ldots, P_s$ gehen, die maximal mögliche Dimension
$$\binom{d+2}{2} - 1 - s$$
hat. Ist diese Zahl negativ, so fordern wir, daß es keine entsprechenden Divisoren gibt.

Betrachten wir zur Illustration den Fall $d = 1$. Ein effektiver Divisor vom Grad eins hat die Form $D = C$ mit einer irreduziblen Kurve vom Grad eins; da alle Kurven vom Grad eins irreduzibel sind, besteht D also aus genau einer Geraden.

Für $s = 1$ ist $\binom{d+2}{2} - 1 - s = \binom{3}{2} - 2 = 1$; da die Geraden, die durch einen festen Punkt gehen, stets ein eindimensionales Büschel bilden, ist also ein einzelner Punkt stets in allgemeiner Lage bezüglich Geraden.

Für $s = 2$ ist $\binom{d+2}{2} - 1 - s = \binom{3}{2} - 3 = 0$; ein nulldimensionaler projektiver Raum ist ein Punkt, d.h. es darf nur eine Gerade geben, die beide Punkte enthält. Da durch zwei *verschiedene* Punkte stets genau eine Gerade geht, sind also zwei Punkte genau dann in allgemeiner Lage bezüglich Geraden, wenn sie verschieden sind.

Für $s = 3$ ist $\binom{d+2}{2} - 1 - s = \binom{3}{2} - 4 = -1$; jetzt darf es also keine Gerade geben, die alle drei Punkte enthält. Drei Punkte sind somit genau dann in allgemeiner Lage bezüglich Geraden, wenn sie auf keiner gemeinsamen Geraden liegen.