Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515
A5, C201

24. Februar 2017

1. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie in der projektiven Ebenen $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ die Schnittmenge der beiden Geraden $x + 2y + 3z = 0$ und $2x + 3y + 5z = 0$!

b) Zeigen Sie, daß zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ stets genau einen Schnittpunkt haben!

c) Gilt dies auch für Geraden in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

Die affine Ebene $\mathbb{R}^2$ sei durch die Abbildung $(x, y) \mapsto (x : y : 1)$ in die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ eingebettet.

a) Finden Sie zwei projektive ebene Kurven, die die Bilder der beiden Geraden $y = 2x + 1$ und $y = 2x + 3$ enthalten, und bestimmen Sie die Schnittmenge dieser beiden Kurven!

b) Finden Sie eine projektive ebene Kurve, die das Bild der Lemniskate

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 - x^2 + y^2 = 0\}$$

enthält! Welche zusätzlichen Punkte enthält sie?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sei gegeben durch die Vorschrift

$$\varphi\big((s : t)\big) = (s^2 - t^2 : 2st : s^2 + t^2)\,.$$

Zeigen Sie, daß φ die projektive Gerade bijektiv abbildet auf eine ebene Kurve $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, und identifizieren Sie diese!

b) Beschreiben Sie die Umkehrabbildung $\psi\colon C \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ durch Polynome in den Koordinaten $x : y : z$ der projektiven Ebenen!

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß man einen Divisor D auf $\mathbb{P}^1(k)$ beschreiben kann durch eine Abbildung $\omega\colon \mathbb{P}^1(k) \to \mathbb{Z}$, die nur für höchstens endlich viele Punkte von $\mathbb{P}^1(k)$ einen von Null verschiedenen Wert annimmt!

b) Folgern Sie daraus, daß die Menge aller Divisoren bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe bildet!

c) Ist sie auch bezüglich der Multiplikation eine Gruppe?

d) In welchen Punkten von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ nimmt die Funktion

$$\frac{X^3 - 1}{X^4 - 16}$$

den Wert Null an, in welchen den Wert ∞ ?

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 1. März 2017, um 10.15 Uhr