

22. Oktober 2013

6. Übungsblatt Elliptische Kurven

Aufgabe 1: (8 Punkte)

k sei ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Charakteristik weder zwei noch drei sei.

- a) Zeigen Sie, daß die durch die Gleichung

$$XY(\alpha Z + X + Y) + Z^3 = 0$$

beschriebene Kurve genau dann nichtsingulär ist, wenn $\alpha^3 + 27 \neq 0$ ist!

- b) Zeigen Sie, daß die durch die Gleichung

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + \lambda XYZ = 0$$

beschriebene Kurve genau dann nichtsingulär ist, wenn $\lambda^3 + 27 \neq 0$ ist!

- c) Zeigen Sie, daß jeder Divisor aus durch linearen System

$$\mu(X^3 + Y^3 + Z^3) + \lambda XYZ = 0, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1(k)$$

beschriebenen linearen System entweder eine nichtsinguläre Kurve oder eine Summe von drei verschiedenen Geraden ist!

Aufgabe 2: (7 Punkte)

- a) Zeigen Sie, daß es in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ über dem Körper $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ mit drei Elementen dreizehn Punkte und dreizehn Geraden gibt!
- b) Wie viele Punkte und wie viele Geraden gibt es in der affinen Ebenen \mathbb{F}_3^2 ?
- c) Zeigen Sie, daß die Punkte und Geraden in \mathbb{F}_3^2 das gleiche Schnittverhalten haben wie die Wendepunkte einer elliptischen Kurve und die Geraden, auf denen diese liegen!

Aufgabe 3: (5 Punkte)

- a) Finden Sie zu einem vorgegebenen Wert $j \in K$ eine elliptische Kurve, deren j -Invariante diesen Wert hat!
- b) Bestimmen Sie die j -Invariante der elliptischen Kurve $Y^2Z = X(X - Z)(X - \lambda Z)$ zum Wert $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$!
- c) Wie viele verschiedene Werte von λ gehören zu jeder j -Invarianten?

Abgabe bis zum Dienstag, dem 29. Oktober 2013, um 15.25 Uhr