Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

23. Januar 2004

13. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)
Finden Sie Polynome a_1, a_2, R derart, daß für

$$f = x^7y^2 + x^3y^2 - y - 1, \qquad f_1 = xy^2 - x \quad \text{und} \quad f_2 = x - y^3$$

gilt $f = a_1f_1 + a_2f_2 + R$; wobei R nur Terme enthält, die kleiner sind als die führenden Terme von f_1 und f_2 bezüglich

a) der lexikographischen Ordnung *b)* der graduierten lexikographischen Ordnung!

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

a) Konstruieren Sie ohne Verwendung eines eingebauten Gröbner-Basis-Kommandos eine Gröbner-Basis des Ideals $I = (x^2+y^2+z^2-1,\ x^2+y^2+z^2-2x,\ 2x-3y-z)$ bezüglich der lexikographischen Ordnung! Der `solve`-Operator darf dabei nur für Polynome einer Veränderlichen verwendet werden.

b) Beschreiben Sie die Nullstellenmenge $V(I) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \bigm| f(x,y,z) = 0 \text{ für alle } f \in I\big\}$ geometrisch, und zeichnen Sie die drei Objekte, deren Schnittmenge $V(I)$ ist!

c) Geben Sie die Elemente von $V(I)$ explizit an!

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Konstruieren Sie einen Zufallsgenerator, der gleichverteilte ganze Zufallszahlen zwischen null und $10^8 - 1$ liefert.

b) Wenden Sie diesen an, um eine Prozedur `zufall2()` zu schreiben, die diesen Generator zwölf Mal aufruft, die zwölf erhaltenen Zufallszahlen addiert, die Summe mit 10^{-8} multipliziert, und als Resultat das um sechs verminderte Ergebnis liefert!

c) Erzeugen Sie mit `zufall2()` zehn Tausend Zufallszahlen, zählen Sie, wie viele von diesen in jedem der Intervalle $[\frac{i}{10} - \frac{1}{20}, \frac{i}{10} + \frac{1}{20})$ für $i = -30$ bis 30 liegen, und stellen Sie das Ergebnis graphisch dar!

d) Vergleichen Sie die erhaltenen Häufigkeiten (graphisch) mit denen, die man für Zufallszahlen aus einer Standardnormalverteilung erwarten würde!

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)
Eine Zufallsvariable heißt *exponentialverteilt* mit Parameter λ, wenn sie nur nichtnegative reelle Zahlen als Werte liefert und die Wahrscheinlichkeit dafür, daß einer dieser Werte im Intervall $[a, b]$ mit $0 \le a \le b$ liegt, gleich $\int_a^b \lambda e^{-\lambda t}\,dt$ ist.

a) Zeigen Sie, daß diese Definition sinnvoll ist in dem Sinne, daß die Werte mit Wahrscheinlichkeit eins nichtnegative reelle Zahlen sind.

b) Schreiben Sie, ausgehend von einem Zufallsgenerator für gleichverteilte Zufallszahlen, eine Prozedur `zufall3(λ)`, die exponentialverteilte Zufallszahlen liefert!

c) Erzeugen Sie damit für $\lambda = \frac{1}{2}, 1$ und 2 jeweils 10 000 Zufallszahlen x_i und berechnen Sie deren Mittelwert $\overline{x}$ sowie ihre Varianz $\frac{1}{10\,000} \sum_{i=1}^{10\,000} (x_i - \overline{x})^2$!

Abgabe bis zum Freitag, dem 30. Januar 2004, um 12.00 Uhr