

9. Januar 2004

11. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: (5 Punkte)

- Schreiben Sie eine Prozedur $\text{Periode}(a, p, x_0)$, die die Periode des linearen Kongruenzgenerators $x_{n+1} = ax_n \pmod p$ für den Startwert x_0 berechnet!
- Testen Sie diese für $p = 31$, $x_0 = 15$ und die beiden Multiplikatoren $a = 3$ und $a = 13$!
- Zeichnen Sie für jeden der beiden Generatoren die Menge aller möglicher Punkte der Form (x_n, x_{n+1}) !
- Welcher der beiden Generatoren ist besser?

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Der zur Zeit der Großrechner sehr populäre Zufallsgenerator RANDU arbeitete mit der Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = (2^{16} + 3)x_n \pmod{2^{31}}.$$

- Zeigen Sie: $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n \equiv 0 \pmod{2^{31}}$ für alle n .
- Zeigen Sie: Die Tripel (x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) liegen allesamt auf 15 Ebenen im \mathbb{R}^3 .
- Erzeugen Sie 10 000 solche Tripel und stellen Sie die zugehörigen Punkte so dar, daß man diese 15 Ebenen sieht! (*Hinweis*: Dreidimensionale Punktfolgen können Sie mit `spacecurve` und `style=point` zeichnen.)

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Man kann zeigen, daß zwei zufällig gewählte natürliche Zahlen x, y mit Wahrscheinlichkeit $6 : \pi^2$ teilerfremd sind.

- Lassen Sie den eingebauten Zufallsgenerator `rand()` von Maple 100 001 Zufallszahlen erzeugen und zählen sie, wie oft eine solche Zahl teilerfremd zu ihrem Vorgänger ist!
- Um wieviel Prozent unterscheidet sich ihr Ergebnis vom theoretisch zu erwartenden Wert?
- Verwenden Sie ihr Ergebnis, um einen Näherungswert für π zu bekommen. Um wieviel Prozent unterscheidet sich dieser vom korrekten Wert?

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Beim Roulette fällt in jedem Spiel eine der Zahlen zwischen 0 und 36 mit (praktisch) gleicher Wahrscheinlichkeit. Ein Spieler, der auf „ungerade“ setzt, verliert seinen Einsatz, wenn das Ergebnis gerade ist, ansonsten bekommt er ihn verdoppelt zurück. Zwei Spieler A und B starten mit einem Kapital von jeweils 100 Chips; beide setzen stets auf „ungerade“.

- Spieler A startet mit einem Einsatz von einem Chip; falls er gewinnt, hört er auf, andernfalls verdoppelt er, sofern er noch genügend Chips hat, beim nächsten Spiel seinen Einsatz. Falls seine Chips dazu nicht ausreichen, hört er auf. Schätzen Sie anhand von 10 000 simulierten Spielen seinen zu erwartenden Gewinn bzw. Verlust!
- Spieler B verwendet im wesentlichen dieselbe Strategie, spielt nach einem Gewinn aber weiter mit demselben Einsatz wie im vorigen Spiel. Welche Bilanz ergibt Ihre Simulation für ihn?

Abgabe bis zum Freitag, dem 16. Januar 2004, um 12.00 Uhr