Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

16. Dezember 2003

10. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: (*10 Punkte*)
Demonstrieren Sie die klassischen drei binomischen Formeln $(a\pm b)^2 = a^2+b^2\pm 2ab$ und $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ geometrisch, indem Sie Flächen mit Inhalt $a^2, b^2, ab, (a\pm b)^2$ und $(a+b)(a-b)$ in geeigneter Weise kombinieren! Erleichtern Sie das Verständnis ihrer Zeichnungen durch geeignete Beschriftung!

Aufgabe 2: (*10 Punkte*)
Das um 1980 von John Horton Conway erfundene Spiel *Life* wird auf einem (unbegrenzten) Brett gespielt. Jedes Feld enthält entweder einen Spielstein („ist bewohnt") oder nicht. In jedem Spielschritt werden die Felder nach folgender Regel modifiziert: Ein Feld ist im k-ten Schritt genau dann bewohnt, wenn es entweder im $(k-1)$-ten Schritt genau drei bewohnte Nachbarfelder hatte oder wenn es im $(k-1)$-ten Schritt nur zwei bewohnte Nachbarfelder hatte und selbst bewohnt war. Spielen Sie Life auf einem Brett der Größe $n\times n$ für $n = 20$, und zeichnen Sie die Ergebnisse der ersten fünfzig Züge für die Anfangskonfiguration, in der genau die folgenden Felder besetzt sind: $(3,2), (4,3), (2,4)$, $(3,4)$, $(4,4)$, $(11,11)$, $(12,12)$, $(13,13)$, $(15,2)$, $(15,3)$, $(15,4)$, $(15,9)$, $(15,10)$, $(16,11)$, $(17,17)$, $(17,18)$ und $(18,17)$!

Aufgabe 3: (*10 Punkte*)

a) Zeichnen Sie zu einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $f(x)$ einer Veränderlichen und einem Punkt x_0 eine Folge von 21 Bildern, die jeweils den Graphen von f sowie den des nullten bis zwanzigsten Taylor-Polynoms in einer Umgebung von x_0 zeigen! Testen Sie ihre Prozedur mit der Sinusfunktion um Eins!

b) Zeichnen Sie zu einer differenzierbaren Funktion $f(x,y)$ zweier Veränderlicher und einem Punkt (x_0,y_0) den Graphen von f in einer Umgebung des Punkte (x_0,y_0) zusammen mit der Tangentialebene an den Graphen im Punkt (x_0,y_0) ! Testen Sie Ihre Prozedur mit der Funktion $\sin x \cos y$ in der Umgebung von $(1,1)$!

Aufgabe 4: (*10 Punkte*)

a) Eine symmetrische reelle Matrix kann bekanntlich durch einen orthonormalen Basiswechsel auf Diagonalgestalt gebracht werden, wobei in der Diagonalen die (allesamt reellen) Eigenwerte stehen. Eine solche Matrix heißt *positiv definit,* falls diese alle positiv sind. Zeigen Sie, daß es dann genau eine symmetrische positiv definite Matrix W gibt, deren Quadrat gleich der gegebenen Matrix ist, und berechnen Sie W !

b) Konstruieren Sie eine symmetrische positiv definite 4×4-Matrix A, deren sämtliche Einträge nicht verschwinden, und verwenden Sie das Programm aus *a),* um die symmetrische positiv definite Matrix W mit $W^2 = A$ zu finden!

FROHE WEIHNACHTEN

und

VIEL ERFOLG IM NEUEN JAHR!

Abgabe bis zum Freitag, dem 9. Januar 2004, um 12.00 Uhr