WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

12. Dezember 2003

9. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)

Bestimmen Sie durch Lösen eines linearen Gleichungssystems die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{x^{12}}{(x^2+1)(x^2+x+1)(x+2)(x-3)^2}\;!$$

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

a) Ist ein reelles Gleichungssystem $A\vec{x}=\vec{b}$ unlösbar, kann man fragen, für welchen Vektor $\vec{x}$ die Länge des Differenzvektors $A\vec{x}-\vec{b}$ möglichst klein ist. Nach einem Satz aus der linearen Algebra erfüllt dieser Vektor das lineare Gleichungssystem $A^TA\vec{x}=A^T\vec{b}$, wobei A^T die transponierte Matrix zu A bezeichnet. Wenden Sie dies an, um die bestmögliche „Lösung" des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{m} k^j x_k = j! \quad \text{für } 1\le j\le n$$

für zwei vorgegebene natürliche Zahlen n, m zu finden!

b) Der Eintrag Δ_{nm} der 12×12-Matrix Δ sei die Länge des Vektors $A\vec{x}-\vec{b}$ im Falle der Parameterwerte n und m. Berechnen Sie Δ !

c) F sei die Matrix mit Einträgen $F_{ij}=\log_{10}(1+\Delta_{ij})$. Stellen Sie diese Matrix graphisch dar, und interpretieren Sie das Ergebnis!

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

$F\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ sei eine differenzierbare Funktion. Das NEWTON-Verfahren zur Lösung des (nichtlinearen) Gleichungssystem $F(\vec{x})=\vec{b}$ startet mit einem Vektor $\vec{z}_0\in\mathbb{R}^n$ und ersetzt diesen im i-ten Schritt durch $\vec{z}_{i-1}+\vec{x}$, wobei $\vec{x}$ das lineare Gleichungssystem

$$F(\vec{z}_{i-1})+J_F(\vec{z}_{i-1})\vec{x}=\vec{b}$$

löst und $J_F(x_1,\dots,x_n)$ die JACOBI-Matrix $(\frac{\partial F_i}{\partial x_j})$ ist. (Maple-Kommande `jacobian`). Wenden Sie dies an, um eine Näherungslösung des Gleichungssystems

$$x^2+y^2+z^2=179,\quad (x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=125,\quad (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=93$$

mit zehn NEWTON-Schritten zu bestimmen, ausgehend von $\vec{z}_0=(5,10,12)$.

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)

Zeigen Sie: Für ein mindestens zweimal differenzierbares Vektorfeld $\vec{V}\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ist

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{V})=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{V})-\begin{pmatrix}\Delta V_1\\ \Delta V_2\\ \Delta V_3\end{pmatrix}\;!$$

(Nützliche Maple-Kommandos: `curl`, `grad`, `diverge`, `laplacian`.*)*

Abgabe bis zum Freitag, dem 19. Dezember 2003, um 12.00 Uhr