Kapitel 4
Die reellen Nullstellen eines Polynoms

Kehren wir zurück zum Grundthema dieser Vorlesung, der Lösung algebraischer Gleichungen. Der letzte Paragraph zeigte uns, wie man reduzible Polynome in einer Veränderlichen in irreduzible zerlegen kann; die damit verbundene Reduktion der Grade kann dazu führen, daß die Nullstellen danach durch explizite Formeln berechnet werden können. Es gibt aber über $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sowie über jedem endlich erzeugten Körper irreduzible Polynome beliebig hohen Grades, und da kann keine Faktorisierung weiterhelfen. Wir brauchen daher zusätzliche Methoden, um auch etwas über die Nullstellen solcher Polynome aussagen zu können.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns nur mit reellen Nullstellen. Erstens sind das für viele Anwendungen ohnehin die einzig interessanten, und zweitens läßt sich die Lokalisierung komplexer Nullstellen zurückführen auf die von reellen.

§1: Die Regel von Descartes

Die älteste Aussage über reelle Nullstellen eines beliebigen Polynoms geht im wesentlichen zurück auf RENÉ DESCARTES; da sie gelegentlich auch als Regel von CARDANO-DESCARTES bezeichnet wird, kannte der rund hundert Jahre vor DESCARTES lebende GIROLAMO CARDANO wahrscheinlich auch schon zumindest einige Spezialfälle.

Wie bei allen im folgenden besprochenen Sätzen wird die Nullstellenanzahl in Verbindung gebracht mit der Anzahl der Vorzeichenwechsel in einer Folge $(a_0, \dots, a_n)$ reeller Zahlen. Um diese zu definieren, streichen wir alle Nullen aus der Folge und zählen dann, wie oft eine der verbleibenden Zahlen ein anderes Vorzeichen hat als ihr Nachfolger. Die Folge $(1, 0, 0, 1, 0, -1, 0, -2, 0, 0, 3)$ hat also *zwei* Vorzeichenwechsel: von 1 auf -1 und von -2 auf 3.

Bei der Regel von DESCARTES betrachten wir für ein reelles Polynom $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ die Anzahl $v(f)$ der Vorzeichenwechsel in der Folge $(a_0, \dots, a_n)$ seiner Koeffizienten.

Regel von Descartes: *a)* Die Anzahl m der mit Vielfachheiten gezählten positiven Nullstellen eines nicht identisch verschwindenden reellen Polynoms $f = a_n x^n + \cdots + a_0$ ist höchstens gleich $v(f)$.
b) $m \equiv v(f) \bmod 2$.

Beweis: Wir können zunächst o.B.d.A. annehmen, daß der konstante Term a_0 nicht verschwindet, denn andernfalls können wir das Polynom durch eine x-Potenz dividieren, ohne daß sich an den positiven Nullstellen und an $v(f)$ etwas ändert. Auch Multiplikation mit -1 läßt beides unverändert; wir können uns daher auf den Fall $a_0 > 0$ beschränken.

Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach dem Grad n von f. Für $n = 0$ gibt es weder Nullstellen noch Vorzeichenwechsel, so daß die Behauptung trivialerweise erfüllt ist.

Für $n > 0$ vergleichen wir f mit seiner Ableitung

$$f' = n a_n x^{n-1} + \cdots + a_2 x + a_1 .$$

Um sicherzustellen, daß auch hier der konstante Term nicht verschwindet, nehmen wir den kleinsten Index $q \geq 1$ mit $a_q \neq 0$ und setzen $f_1 = f'/x^{q-1}$. Dann hat f_1 dieselben positiven Nullstellen wie f' und auch dieselbe Anzahl von Vorzeichenwechsel. Nach Induktionsannahme wissen wir, daß die Anzahl m' der positiver Nullstellen von f_1 (und damit f') höchstens gleich $v(f_1) = v(f')$ ist und $m' \equiv v(f') \bmod d$.

Die positiven Nullstellen von f seien $0 < x_1 < \cdots < x_r$, wobei x_i die Vielfachheit e_i habe. Die Anzahl m der positiver Nullstellen ist also, mit Vielfachheiten gerechnet, einfach die Summe der e_i.

Eine e_i-fache Nullstelle von f ist eine $(e_i - 1)$-fache Nullstelle von f', außerdem liegt zwischen je zwei Nullstellen von f mindestens eine Nullstelle der Ableitung f' und damit auch von f_1. Somit hat f_1 mindestens

$$r-1+\sum_{i=1}^{r}(e_i-1)=\sum_{i=1}^{r}e_i-1=m-1$$

positive Nullstellen im abgeschlossenen Intervall $[x_1,\,x_r]$.

Wir können noch mehr sagen: Unmittelbar rechts von einer Nullstelle x_i geht der Graph von f entweder nach oben und kommt dann auch von oben auf die nächste Nullstelle x_{i+1} zu, oder aber er geht nach unten und von dort aus zu x_{i+1}. In jedem Fall hat aber f' unmittelbar rechts von x_i ein anderes Vorzeichen als unmittelbar links von x_{i+1}. Daher muß die Anzahl der Nullstellen von f' zwischen im offenen Intervall $(x_1,\,x_{i+1})$ mit Vielfachheiten gezählt ungerade sein. Die Anzahl der Nullstellen von f' im abgeschlossenen Intervall $[x_1,\,x_r]$ ist daher modulo zwei kongruent zur gerade berechneten Mindestanzahl $m-1$.

Bleiben noch die Nullstellen von f' rechts von x_r und links von x_1. Falls f' unmittelbar rechts von x_r positiv ist, geht f für $x\to\infty$ gegen $+\infty$; daher ist auch das Vorzeichen von f' positiv für $x\to\infty$. Somit hat f', wenn überhaupt, eine gerade Anzahl von Nullstellen rechts von x_r.

Für die Nullstellen zwischen 0 und x_1 können wir ähnlich argumentieren: $f(0)=a_0$ ist positiv; der Graph von f kommt also von oben nach x_1, d.h. f' ist unmittelbar links von x_1 negativ. An der Stelle $x=0$ ist $f'(0)=a_q$, wir haben also für positives a_q eine ungerade Anzahl von Nullstellen im offenen Intervall $(0,\,x_1)$ und für negatives a_q eine gerade. Somit ist

$$m' \ge \left\{\begin{matrix} m-1 & \text{falls } a_q<0 \\ m & \text{falls } a_q>0 \end{matrix}\right\} < v(f_1)$$

und

$$m' \equiv \begin{cases} m-1 \bmod 2 & \text{falls } a_q<0 \\ m \bmod 2 & \text{falls } a_q>0 \end{cases}.$$

Die Koeffizientenfolge $(na_n,(n-1)a_{n-1},\dots,qa_q)$ hat diesselben Vorzeichen wie $(a_n,\dots,a_q)$. Falls a_q positiv ist, ist die Anzahl der Vorzeichenwechsel dort gleich $v(f)$, denn zwischen a_q und a_0 gibt es dann keinen Vorzeichenwechsel mehr. Bei negativem a_q gibt es einen, dann

ist also $v(f_1)=v(f)-1$. Vergleichen wir dies mit den obigen Formeln für m', folgt die Behauptung.

■

Der Mathematiker und Philosoph RENÉ DESCARTES wurde 1596 im französischen La Haye en Touraine geboren. 1802 wurde der Ort umbenannt in La Haye Descartes, seit 1967 heißt er einfach Descartes. Von 1604 bis 1612 war RENÉ DESCARTES Schüler am Jesuitenkolleg in Anjou, später studierte er Jura an der Universität von Poitiers. Nach seinem Abschluß im Jahr 1616 ging er an die Militärschule von Breda, wo er unter anderem Mathematik und Naturwissenschaften studierte. Nach zweijähriger Reise durch Europa schloß er sich 1619 der Bayrischen Armee an. Weitere Reisen quer durch Europa folgten, bis er sich 1628 in Holland niederließ. Er schrieb dort ein physikalisches Werk unter dem Titel *Le Monde, ou Traité de la Lumière*, das er aber, nachdem er von GALILEIS Verurteilung hörte, nicht veröffentlichte. Erst 1637 erschien es als philosophisches Werk unter dem Titel *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* mit drei Anhängen über Optik, Meteore und Geometrie. Im letzteren führte er algebraischen Methoden ein, unter anderem die kartesischen Koordinaten.

Nach der Regel von DESCARTES hat beispielsweise das Polynom

$$f(x)=\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x+1$$

keine positive reelle Nullstellen, denn alle seine Koeffizienten sind positiv, so daß es keine Vorzeichenwechsel gibt. Die negativen Nullstellen dieses Polynoms entsprechen den positiven Nullstellen von

$$f(-x)=(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^{n-2}x^{n-2}+\dots-x+1\,.$$

Hier wechselt die Koeffizientenfolge ständig zwischen 1 und -1; es gibt daher $n-1$ Vorzeichenwechsel und somit höchstens n negative Nullstellen von f. Deren Anzahl ist gerade für ungerade n und ungerade für gerade n; insbesondere muß es also für gerade n mindestens eine negative Nullstelle von f geben. In der Tat ist dann -1 eine Nullstelle.

Durch einen Trick von JACOBI kann man mit der Regel von DESCARTES auch etwas über die Anzahl der Nullstellen in einem vorgegebenen Intervall $(a,\,b)$ aussagen kann: Die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}\,;\; x\mapsto\frac{a+bx}{1+x}$$

bildet die positiven reellen Zahlen bijektiv ab nach (a, b), das Intervall $(-1, 0)$ auf die Zahlen kleiner a und die Zahlen kleiner -1 auf die Zahlen größer b. Betrachten wir daher zu einem vorgegebenen Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad n das neue Polynom $g(x) = (1+x)^n f\big(\varphi(x)\big)$, so entsprechen dessen positive Nullstellen genau den Nullstellen von f aus (a, b). Die Berechnung von g ist freilich etwas mühsam und muß für jedes neue Intervall von neuem durchgeführt werden.

§2: Der Satz von Budan-Fourier

Dieses Problem vermeidet ein in diesem Paragraphen vorgestellte Resultat, das BUDAN 1807 und FOURIER 1820 unabhängig voneinander veröffentlichten und das FOURIER anscheinend schon ab 1796 in seinen Vorlesungen an der *Ecole Polytechnique* lehrte.

FERDINAND FRANÇOIS DÉSIRÉ BUDAN DE BOISLAURENT wurde 1761 auf Haiti geboren. Im Alter von acht Jahren wurde in eine Klosterschule in der Nähe von Paris geschickt, wo er acht Jahre lang vor allem klassische Sprachen lernte. Mathematik und Naturwissenschaften waren kein Teil des Lehrplans; wegen seines großen Interesses erhielt er aber zweimal wöchentlich Zusatzstunden bei dem Mathematiker J.-C. FARCOT. Danach studierte er vor allem Rhetorik und Philosophie; ab 1803 arbeitete er als Schulrat. Im gleichen Jahr reichte er auch seine Arbeit mit dem hier vorgestellten Resultat ein, sie wurde aber erst 1807 veröffentlicht und, da BUDAN eher als Amateurmathematiker galt, wenig beachtet. 1811 präsentierte er der Akademie der Wissenschaften in Paris einen Beweis, der 1822 nach Begutachtung (und Korrektur kleinerer Lücken) durch LAGRANGE veröffentlicht wurde. Er starb 1840 in Paris.

JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768–1830) begann zunächst eine Ausbildung zum Priester, beendete diese jedoch nicht, sondern wurde stattdessen Mathematiklehrer. 1793 trat er dem lokalen Revolutionskomittee bei, 1798 begleitete er Napoleon auf dessen Ägyptenfeldzug. Nach dem Rückzug aus Ägypten ernannte ihn dieser zum Präfekten von Isère; dort in Grenoble begann er mit seinen Arbeiten über Wärmeleitung, aus denen die FOURIER-Reihen hervorgingen. Nach Napoleons endgültiger Vertreibung wurde FOURIER 1817 in die Akademie der Wissenschaften gewählt; 1822 wurde er Sekretär der mathematischen Sektion.

BUDAN und FOURIER suchten nach Aussagen über die Anzahl der Nullstellen eines reellen Polynoms f in einem Intervall $[a, b]$. Sie betrachten

dazu für ein $x \in \mathbb{R}$ dies Anzahl $S_f(x)$ der Vorzeichenwechsel in der Folge $\big(f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)\big)$, wobei n den Grad von f bezeichnet, und zeigen den

Satz von Budan-Fourier: Falls weder f noch eine seiner Ableitungen in den Punkten $a < b$ verschwindet, ist die Anzahl reeller Nullstellen von f in $[a, b]$ mit Vielfachheiten gezählt höchstens gleich $S_f(a) - S_f(b)$, und sie ist modulo zwei kongruent zu dieser Differenz.

Beweis: Wir ordnen die Nullstellen von f und die seiner sämtlichen Ableitungen der Größe nach an:

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_r < b\,.$$

Der Einfacheit halber setzen wir $x_0 = a$ und $x_{r+1} = b$, obwohl das natürlich nach Voraussetzung keine Nullstellen sind.

In jedem der offenen Intervalle (x_i, x_{i+1}) ist $S_f(x)$ konstant, denn solange weder f noch eine seiner Ableitungen verschwindet, ändert sich nichts an den Vorzeichen und damit der Anzahl der Vorzeichenwechsel.

Wir wählen für $i = 1, \dots, r+1$ je eine reelle Zahl c_i aus dem Intervall (x_{i-1}, x_i). Dann ist x_i der einzige Wert im Intervall $[c_i, c_{i+1}]$, an dem f oder eine seiner Ableitungen veschwinden kann. Insbesondere ist die Anzahl der Nullstellen von f in $[a, b]$ gleich der Summe der Nullstellenanzahlen in den Intervallen $[c_i, c_{i+1}]$, und

$$S_f(a) - S_f(b) = \sum_{i=0}^{r} \big(S_f(c_i) - S_f(c_{i+1})\big)\,.$$

Daher genügt es, den Satz für die Intervalle $[c_i, c_{i+1}]$ zu beweisen; wir können also o.B.d.A. annehmen, daß es im Intervall $[a, b]$ genau einen Punkt x gibt, in dem f oder eine (oder mehrere) seiner Ableitungen verschwindet. m sei die Nullstellenordnung von f ind x, d.h. $m = 0$, falls x keine Nullstelle von f, sondern nur von einer der Ableitungen ist, und $m \geq 1$ sonst. Mit dieser Bezeichnung ist der Satz äquivalent zu den beiden Aussagen

$$m \leq S_f(a) - S_f(b) \quad \text{und} \quad m \equiv S_f(a) - S_f(b) \bmod 2\,.$$

Wir beweisen ihn durch Induktion nach dem Grad von f.

Im Falle einer linearen Funktion $f(x) = px + q$ können wir o.B.d.A. annehmen, daß q positiv ist; dann liegt die einzige Nullstelle $x = -q/p$ genau dann im Intervall (a, b), wenn $ap + q < 0 < bp + q$ ist, d.h. wenn $f(a)$ negativ und $f(b)$ positiv ist. Die Ableitung $f'(x) = q$ ist überall positiv, also ist $S_f(u) = 1$ genau dann, wenn $f(u)$ negativ ist, und $S_f(u) = 0$ sonst. Damit ist der Induktionsanfang erledigt.

Nun sei f ein Polynom vom Grad mindestens zwei. Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: $m \geq 1$. Dann ist $f(x) = 0$ und f' hat in x eine $m-1$-fache Nullstelle. Nach Induktionsannahme ist

$$S_{f'}(a) - S_{f'}(b) \geq m - 1 \quad \text{und} \quad m - 1 \equiv S_{f'}(a) - S_{f'}(b) \bmod 2\,.$$

Wenn $f(a)$ positiv ist, muß $f'(a)$ negativ sein, da der Graph nach *unten* zur Nullstelle geht; entsprechend ist $f'(a)$ positiv für negatives $f(a)$. Somit ist $S_f(a) = S_{f'}(a) + 1$. Am anderen Intervallende ist dagegen $S_f(b) = S_{f'}(b)$, denn ist $f(b)$ positiv, so muß der Graph von f steigen, und ist $f(b)$ negativ, so muß er fallen. Damit ist

$$S_f(a) - S_f(b) \geq m \quad \text{und} \quad m \equiv S_f(a) - S_f(b) \bmod 2\,,$$

was die Behauptung auch für f beweist.

2. Fall: Weder f noch f' haben in $[a, b]$ eine Nullstelle. Dann hat sowohl f als auch f' überall im Intervall dasselbe Vorzeichen, also ist entweder $S_f(a) = S_{f'}(a)$ und $S_f(b) = S_{f'}(b)$ oder $S_f(a) = S_{f'}(a) + 1$ und $S_f(b) = S_{f'}(b) + 1$. In beiden Fällen ist

$$S_f(a) - S_f(b) = S_{f'}(a) - S_{f'}(b)$$

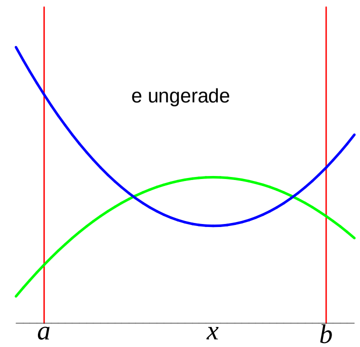
nach Induktionsvoraussetzng größer oder gleich null und gerade, wie es in diesem Fall auch sein muß.

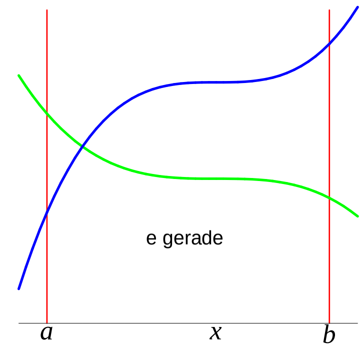
3. Fall: $f'(x) = 0$; die Vielfachheit dieser Nullstelle sei e. Nach der TAYLORschen Formel ist in der Umgebung von x

$$f'(x + h) \approx \frac{f^{(e+1)}(x)}{e!} h^e \quad \text{und} \quad f(x + h) \approx f(x) + \frac{f^{(e+1)}(x)}{(e+1)!} h^{e+1}\,.$$

Da f' außer in x nirgends sein Vorzeichen wechseln kann, können wir daraus die Vorzeichen von $f'(a)$ und $f'(b)$ bestimmen: Für gerades e sind beide gleich dem Vorzeichen von $f^{(e+1)}(x)$, für ungerades e haben $f^{(e+1)}(x)$ und $f'(b)$ dasselbe Vorzeichen und $f'(a)$ das andere.

Die beiden folgenden Diagramme zeigen das Verhalten von f zwischen a und b, wobei die blaue Kurve jeweils einem posiviten Wert von $f^{(e+1)}(x)$ entspricht und die grüne einem negativen.





Über die Vorzeichen von $f(a)$ und $f(b)$ wissen wir nur, daß sie gleich sind, da f in $[a, b]$ keine Nullstelle hat. Um $S_f(a)$ und $S_f(b)$ auf $S_{f'}(a)$ und $S_{f'}(b)$ zurückzuführen, müssen wir daher die verschiedenen Kombinationen aus Vorzeichen von $f(a)$ und $f^{(e+1)}(x)$ betrachten.

Um die Diskussion kurz und übersichtlich zu machen, benutzen wir die Vorzeichen- oder Signum-Funktion

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}\,.$$

Wie wir uns gerade überlegt haben, ist

$$\operatorname{sgn} f'(a) = (-1)^e \operatorname{sgn} f^{(e+1)}(x) \quad \text{und} \quad \operatorname{sgn} f'(b) = \operatorname{sgn} f^{(e+1)}(x)\,;$$

außerdem ist $\operatorname{sgn} f(a) = \operatorname{sgn} f(b)$.

Im Falle $\operatorname{sgn} f(a) = \operatorname{sgn} f^{(e+1)}(x)$ ist daher

$$\operatorname{sgn} f(a) = (-1)^e \operatorname{sgn} f'(a) \quad \text{und} \quad \operatorname{sgn} f(b) = \operatorname{sgn} f'(b)\,,$$

also $S_f(b) = S_{f'}(b)$ und

$$S_f(a) = \begin{cases} S_{f'}(a) & \text{falls } e \text{ gerade} \\ S_{f'}(a) + 1 & \text{falls } e \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Die Differenz $S_f(a) - S_f(b)$ ist somit für gerade e gleich der zwischen $S_{f'}(a)$ und $S_{f'}(b)$, für ungerade e ist sie um eins größer.

Falls $f(a)$ und $f^{(e+1)}(x)$ verschiedene Vorzeichen haben, ist

$$\operatorname{sgn} f(a) = (-1)^{e+1} \operatorname{sgn} f'(a) \quad \text{und} \quad \operatorname{sgn} f(b) = -\operatorname{sgn} f'(b) .$$

Hier ist also $S_f(b) = S_{f'}(b) + 1$ und

$$S_f(a) = \begin{cases} S_{f'}(a) & \text{falls } e \text{ ungerade} \\ S_{f'}(a) + 1 & \text{falls } e \text{ gerade} \end{cases} .$$

Die Differenz $S_f(a) - S_f(b)$ bleibt also wieder für gerade e unverändert, für ungerade aber wird sie nun um eins kleiner.

Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$S_{f'}(a) - S_{f'}(b) \geq e \quad \text{und} \quad S_{f'}(a) - S_{f'}(b) \equiv e \bmod 2 .$$

Für gerade e ist daher

$$S_f(a) - S_f(b) \geq e \geq 0 \quad \text{und} \quad S_f(a) - S_f(b) \equiv e \equiv 0 \bmod 2$$

und für ungerade e erhalten wir

$$S_f(a) - S_f(b) \geq e - 1 \geq 0 \quad \text{und} \quad S_f(a) - S_f(b) \equiv e - 1 \equiv 0 \bmod 2 ,$$

wie behauptet.

Damit ist der Satz von BUDAN-FOURIER bewiesen. ■

§3: Der Satz von Sturm

Die Regel von DESCARTES und auch der Satz von BUDAN-FOURIER geben nur Obergrenzen und Kongruenzbedingungen modulo zwei für Nullstellenanzahlen; der erste, der eine Formel für die genaue Anzahl angeben konnte, war 1835 CHARLES-FRANÇOIS STURM. Auf den Hinweis, daß er dazu eine Modifikation des in der Computeralgebra so

allgegenwärtigen EUKLIDischen Algorithmus benutzt, kann man eigentlich fast schon verzichten. Im Unterschied zu DESCARTES, BUDAN und FOURIER geht es beim Satz von STURM allerdings um die Anzahl *verschiedener* Nullstellen; Vielfachheiten spielen hier keine Rolle.

JACQUES CHARLES-FRANÇOIS STURM wurde 1803 in Genf als Sohn eines Mathematiklehrers geboren. Ab 1821 studierte er an der dortigen Akademie Mathematik. 1823, nach Ende seines Studiums, wurde er Tutor des Sohns von Mme DE STAËL, was ihm genügend Zeit für mathematische Arbeiten ließ. Als die Familie für sechs Monate nach Paris zog, traf er dort im Haus von ARAGO unter anderem LAPLACE, POISSON, FOURIER, GAY-LUSSAC und AMPÈRE. 1825 kehrte er nach Paris zurück, wo er zwar als Tutor für ARAGOs Sohn arbeitete, vor allem aber Vorlesungen besuchte. Zeitweise arbeitete er auch als Assistent von FOURIER. Nach der Revolution von 1830 wurde es auch für einen Protestanten möglich, eine Professor in Frankreich zu bekommen; so kam er 1830 ans *Collège Rollin* und 1838 an die *Ecole normale supérieure;* 1833 wurde er französischer Staatsbürger. In seinen späten Arbeiten beschäftige er sich vor allem, zusammen mit LIOUVILLE, mit Differentialgleichungen. Er starb 1855 in Paris.

Die Modifikation, die STURM am EUKLIDischen Algorithmus vornimmt, betrifft nur das Vorzeichen der Reste: Die Folge der Divisionsreste bei der Berechnung des ggT zweier Polynome f und g können wir beschreiben durch die Rekursionsvorschrift

$$r_0 = f, \quad r_1 = g, \quad r_{i+2} = \text{Rest bei der Division von } r_i \text{ durch } r_{i+1} ,$$

wobei abgebrochen wird, sobald ein r_j verschwindet. Für $i \geq 2$ ist also $r_i = q_i r_{i+1} + r_{i+2}$.

Definition: Die STURMsche Kette zum Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ wird berechnet nach der Rekursionsvorschrift

$$f_0 = f, \quad f_1 = f', \quad f_{i+2} = -\text{Rest bei der Division von } f_i \text{ durch } f_{i+1} ,$$

wobei abgebrochen wird, sobald ein f_j verschwindet. Für $i \geq 2$ ist also $f_i = q_i f_{i+1} - f_{i+2}$.

Da der Grad von f_{i+1} stets echt kleiner ist als der von f_i, bricht jede Sturmsche Kette ab. Ihr letztes Polynom f_s ist ein ggT von f und f', denn für die Teilbarkeitsargumente beim EUKLIDischen Algorithmus spielen Vorzeichen keine Rolle. Insbesondere ist also f_s konstant, falls f keine mehrfache Nullstellen hat.

Beschränken wir uns zunächst auf diesen Fall eines Polynoms mit höchstens einfachen Nullstellen. Seine STURMsche Kette $(f_0, \dots, f_s)$ hat folgende Eigenschaften:

a) $f_0 = f$

b) f_s hat keine Nullstellen

c) Ist für ein i mit $0 < i < s$ der Punkt x eine Nullstelle von f_i, so ist $f_{i-1}(x)f_{i+1}(x) < 0$, d.h. $f_{i-1}(x)$ und $f_{i+1}(x)$ haben verschiedene Vorzeichen, denn $f_{i-1}(x) = q_{i-1}f_i(x) - f_{i-1}(x) = -f_{i-1}(x)$, falls $f_i(x)$ verschwindet.

d) Ist x_0 eine Nullstelle von $f = f_0$, so sind in einer Umgebung von x_0 die Funktionswerte von $f_0(x)f_1(x)$ links von x_0 negativ und rechts davon positiv, denn da f keine mehrfache Nullstellen hat, kann $f'(x_0)$ nicht verschwinden, und $\frac{d}{dx}f_0(x)f_1(x) = f'(x)^2 - f(x)f''(x)$ hat bei x_0 den positiven Wert $f'(x_0)^2$.

Wir wollen in Zukunft jede Folge $(f_0, \dots, f_s)$ zu einem Polynom f mit den Eigenschaften *a)* bis *d)* als eine STURMsche *Folge* zu f bezeichnen. Für Polynome ohne mehrfache Nullstellen ist also die STURMsche Kette eine STURMsche Folge.

Als nächstes definieren wir für jede Folge $(f_0, \dots, f_s)$ von Polynomen ihre *Variation* $v(a)$ in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ als Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge reeller Zahlen $f_0(a), f_1(a), \dots, f_s(a)$.

Für jede STURMsche Folge zu einem Polynom f gilt:

Satz: Die Anzahl der Nullstellen des Polynoms f mit $a < x \le b$ ist $v(a) - v(b)$.

Beweis: Wir untersuchen, in der Umgebung welcher Punkte sich in der Folge $\big(f_0(x), f_1(x), \dots, f_s(x)\big)$ etwas an den Vorzeichen ändern kann.

Sind alle $f_i(x) \neq 0$, so bleiben auch in einer Umgebung von x alle Vorzeichen gleich, also ist $v(x)$ konstant in der Umgebung von x.

Ist $f(x) \neq 0$, aber (mindestens) ein $f_i(x) = 0$, so ist $i > 0$ und nach *b)* ist $i < s$. Damit gibt es Funktionen f_{i-1} und f_{i+1}; nach *c)* ist $f_{i-1}(x)f_{i+1}(x) < 0$. Somit haben $f_{i-1}(x)$ und $f_{i+1}(x)$ verschiedene Vorzeichen, sind also insbesondere ungleich null. Die Vorzeichen von

$f_{i-1}(x)$ und $f_{i+1}(x)$ sind daher in einer Umgebung von x konstant und verschieden; egal welche Werte f in dieser Umgebung annimmt, gibt es also von f_{i-1} nach f_{i+1} genau einen Vorzeichenwechsel, so daß $v(x)$ auch in der Umgebung dieses Punkts konstant ist.

Bleibt noch der Fall, daß f selbst im Punkt x verschwindet. Falls $f = f_0$ bei x einen Vorzeichenwechsel von – nach + hat, muß f_1 wegen *d)* in einer Umgebung von x positiv sein; also haben f_0 und f_1 vor x verschiedene Vorzeichen, danach gleiche. Entsprechendes gilt, wenn f bei x von + nach – wechselt, denn dann muß f_1 in einer Umgebung von x negativ sein, d.h. beim Durchgang durch x wird v um eins kleiner.

Ist f sowohl links als auch rechts von x positiv, so muß f_1 wegen *d)* links negativ und rechts positiv sein; wieder geht also beim Durchgang durch x ein Vorzeichenwechsel verloren, genauso im Fall, daß f links und recht von x negativ ist.

Damit ist gezeigt, daß die Funktion v genau in den Punkten um eins kleiner wird, in denen f eine Nullstelle hat; und damit ist der Satz bewiesen. ∎

Satz von Sturm: Ist $[a, b]$ ein Intervall, an dessen Endpunkten a, b das Polynom f nicht verschwindet, und bezeichnet $v(x)$ die Variation der STURMschen Kette zu f, so hat f in $[a, b]$ genau $v(a) - v(b)$ Nullstellen.

Beweis: Falls f keine mehrfachen Nullstellen hat, ist die STURMsche Kette eine STURMsche Folge, also folgt die Behauptung aus dem gerade bewiesenen Satz.

Andernfalls sei $(f_0, \dots, f_s)$ die STURMsche Kette von f; wegen deren Konstruktion über den EUKLIDischen Algorithmus ist dann $g = f_s$ ein größter gemeinsamer Teiler von f und f', und alle f_i sind durch g teilbar. Somit besteht auch die Folge $(f_0/g, \dots, f_s/g)$ nur aus Polynomen, und in jedem Punkt, in dem g keine Nullstelle hat, ist ihre Variation gleich der der STURMschen Kette. Da die Intervallenden a und b nach Voraussetzung keine Nullstellen sind, hat sie also insbesondere an den Stellen a und b dieselbe Variation wie die STURMsche Kette von f.

Die Funktion f/g hat dieselben Nullstellen wie f, aber jeweils nur einfach. Falls wir also zeigen können, daß $(f_0/g, \dots, f_s/g)$ eine STURMsche Folge zu f/g ist, folgt der Satz auch in diesem Fall aus dem gerade bewiesenen.

Die Eigenschaften *a)* und *b)* einer STURMsche Folge sind trivial.

Für *c)* müssen wir eine Nullstelle x von f_i/g für ein i zwischen null und $s-1$ betrachten. Ist $f_{i-1} = g_i f_i - f_{i+1}$ die Gleichung aus der Definition der STURMschen Kette zu f, so ist natürlich auch $f_{i-1}/g = g_i \cdot f_i/g - f_{i+1}/g$, also haben f_{i-1}/g und f_{i+1}/g in jeder Nullstelle von f_i/g verschiedene Vorzeichen. (Sie können nicht null sein, denn wenn zwei aufeinanderfolgende f_i/g in einem Punkt verschwinden, müßte $f_s/g = 1$ dort wegen der gerade gezeigten Rekursionsbeziehung ebenfalls verschwinden.)

Bleibt noch *d)*: Wir betrachten eine k-fache Nullstelle x_0 von f und schreiben $f(x) = (x-x_0)^k h(x)$. Dann ist

$$f'(x) = (x-x_0)^k h'(x) + k(x-x_0)^{k-1} h(x) \quad \text{und}$$

$$g(x) = (x-x_0)^{k-1} q(x) \quad \text{mit} \quad q(x_0) \neq 0\,,$$

also
$$\frac{f_1(x)}{g(x)} = (x-x_0)\frac{h'(x)}{q(x)} + k\frac{h(x)}{q(x)}\,.$$

Somit ist

$$\frac{f_0(x)}{g(x)} \cdot \frac{f_1(x)}{g(x)} = (x-x_0)^2 \frac{h(x)h'(x)}{q(x)^2} + k(x-x_0)\frac{h(x)^2}{q(x)^2}\,.$$

Der Koeffizient von $(x-x_0)$ ist somit ein Quadrat, also positiv; damit folgt *d)*, und der STURMsche Satz ist bewiesen. ∎

Als erstes Beispiel betrachten wir das Polynom

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + \tfrac{1}{2}\,.$$

Seine STURMsche Kette ist

$$\left(f(x),\ 4x^3 + 9x^2 + 4x + 1,\ \tfrac{11}{16}x^2 - \tfrac{5}{16},\ -\tfrac{64}{11}x - \tfrac{56}{11},\ -\tfrac{219}{1024}\right).$$

Für eine Zahl x mit hinreichend großem Betrag wird das Vorzeichen des Werts einer Polynomfunktion durch den höchsten Term bestimmt; wir haben also für stark negative Werte von x die Vorzeichenverteilung $(+,-,+,+,-)$ mit drei Vorzeichenwechseln; für große positive x erhalten wir $(+,+,+,-,-)$ mit nur einem Vorzeichenwechsel. Somit gibt es insgesamt zwei reelle Nullstellen.

Um deren Vorzeichen zu bestimmen, werten wir die STURMsche Kette an der Stelle null aus: $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{5}{16}, -\frac{56}{11}, -\frac{219}{1024})$ hat einen Vorzeichenwechsel, also sind alle Nullstellen negativ. Wenn wir $x=-1$ in die STURMsche Kette einsetzen, erhalten wir die Folge $(-\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{8}, \frac{8}{11}, -\frac{219}{1024})$ mit zwei Vorzeichenwechsel; somit gibt es eine Nullstelle z_1 mit $-1 < z_1 \leq 0$ und eine Nullstelle $z_2 \leq -1$.

Für $x=-2$ erhalten wir die Folge $(-\frac{3}{2}, -3, \frac{39}{16}, \frac{72}{11}, -\frac{219}{1024})$ mit ebenfalls zwei Vorzeichenwechseln, so daß $z_2 \leq -2$ sein muß. und für $x=-3$ haben wir in $(\frac{31}{2}, -38, \frac{47}{8}, \frac{136}{11}, -\frac{219}{1024})$ drei Vorzeichenwechsel, also ist $-3 < z_2 \leq -2$. Damit kennen wir immerhin schon die ganzzahligen Anteile der beiden Nullstellen.

Als nächstes „Beispiel“ wollen wir untersuchen, wie viele reelle Nullstellen das quadratische Polynom $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ hat. Seine Ableitung ist $f_1(x) = 2ax + b$, und

$$(ax^2 + bx + c) : (2ax + b) = \frac{1}{2}x = \frac{x}{2} + \frac{b}{4a} \text{ Rest } \frac{b^2 - 4ac}{4a}\,.$$

Also ist f_2 die Konstante $\Delta/4a$ mit $\Delta = b^2 - 4ac$, und die STURMsche Kette von f ist

$$\left(ax^2 + bx + c,\ \ 2ax + b,\ \frac{\Delta}{4a}\right).$$

Ist $a > 0$, so haben wir für große x die Vorzeichenfolge $\big(+,+,\operatorname{sgn}(\Delta)\big)$, für sehr negative x erhalten wir $\big(+,-,\operatorname{sgn}(\Delta)\big)$.

Für $\Delta > 0$ haben wir daher für $x \to \infty$ die Variation $v(x) = 0$, für $x \to -\infty$ dagegen $v(x) = 2$. Somit gibt es zwei Nullstellen. Für $\Delta = 0$ folgt entsprechend, daß es nur eine gibt. Für $\Delta < 0$ haben wir die beiden Vorzeichenverteilungen $(+,+,-)$ und $(+,-,-)$, die beide Variation eins haben, also gibt es für $\Delta < 0$ keine reelle Nullstelle. Für $a < 0$ drehen sich alle Vorzeichen um, an den Variationen und somit am Ergebnis ändert sich nichts. Beruhigenderweise stimmen alle diese

Ergebnisse überein mit dem, was wir auch direkt aus der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ablesen können.

Interessanter wird es, wenn wir das kubische Polynom $f(x) = x^3+px+q$, auf das wir die Lösungstheorie kubischer Gleichungen zurückgeführt hatten, mit Hilfe der STURMschen Theorie untersuchen: Hier ist die Ableitung $f_1(x) = 3x^2 + p$ und

$$(x^3 + px + q) : (3x^2 + p) = \frac{x}{3} \text{ Rest } \frac{3p}{2}x + q\,,$$

so daß $f_2 = -\frac{3p}{2}x - q$. Weiter ist

$$(3x^2 + p) : \left(-\frac{3p}{2}x - q\right) = -\frac{9x}{2p} + \frac{27q}{4p^2} \text{ Rest } \left(p^3 + \frac{27}{4}q^2\right) \Big/ p^2\,,$$

die STURMsche Kette endet also mit $f_3 = -\left(p^3 + \frac{27}{4}q^2\right) \Big/ p^2$.

Für die Anzahl reeller Lösungen ist das asymptotische Verhalten relevant: Da $f(x) = x^3 + px + q$ durch den führenden Term x^3 dominiert wird, ist hier das Vorzeichen unabhängig von p und q für große negative x stets negativ und für große positive x stets positiv. Entsprechend haben wir für $f_1(x) = 3x^2 + p$ in beiden Fällen positive Vorzeichen. Auch bei der linearen Funktion $f_2(x) = -\frac{3}{2p}x - q$ ist unabhängig von q das Vorzeichen für stark negative x stets gleich dem von p, für positive dagegen gleich dem von $-p$. (Der ziemlich triviale Fall $p = 0$ sei dem Leser überlassen.) Das Vorzeichen von $f_3(x)$ schließlich ist das von $-\Delta$ mit $\Delta = p^3 + \frac{27}{4}q^2$, denn $p^2 \geq 0$.

Die Vorzeichenfolge wird dann für große negative Werte von x zu $(-, +, \operatorname{sgn} p, -\operatorname{sgn}\Delta)$; für große positive zu $(+, +, -\operatorname{sgn} p, -\operatorname{sgn}\Delta)$. Für $\Delta > 0$ und haben wir also die Folgen $(-, +, \operatorname{sgn} p, -)$ und $(+, +, -\operatorname{sgn} p, -)$; da $\pm\operatorname{sgn} p$ zwischen einem $+$ und einem $-$ steht, haben wir im ersten Quadrupel immer zwei Vorzeichenwechsel und im zweiten immer nur einen; es gibt daher für $\Delta < 0$ nur eine reelle Nullstelle (und zwei komplexe).

Im Fall $\Delta = 0$ haben wir die Folgen $(-, +, \operatorname{sgn} p, 0)$ und $(+, +, -\operatorname{sgn} p, 0)$. Da $q^2 \geq 0$ aber $\Delta = 0$ ist, muß hier entweder $p = q = 0$ sein oder $p < 0$. Im letzteren Fall hat $(-, +, \operatorname{sgn} p, 0)$ zwei Vorzeichenwechsel und $(+, +, -\operatorname{sgn} p, 0)$ keinen; es gibt also zwei reelle Nullstellen (von denen eine die Vielfachheit zwei hat). Im ersten Fall hat $(+, +, -\operatorname{sgn} p, 0)$ nur einen Vorzeichenwechsel und $(+, +, -\operatorname{sgn} p, 0)$ wieder keinen; es gibt also nur eine reelle Nullstelle. Da wir für $p = q = 0$ die Gleichung $y^3 = 0$ haben, ist das die dreifache Nullstelle $y = 0$.

Für $\Delta < 0$ schließlich ist notwendigerweise $p < 0$, denn q^2 kann nicht negativ werden. Wir bekommen daher die Folgen $(-, +, -, +)$ mit drei Vorzeichenwechseln und $(+, +, +, +)$ ohne Vorzeichenwechsel; hier gibt es also drei reelle Nullstellen.

Wenn wir mit der Lösungsformel

$$y = u - \frac{p}{3u} \quad \text{mit} \quad u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{27}}}$$

vergleichen, sehen wir, warum wir in Kapitel 1, §3 bei den Beispielen mit drei verschiedenen reellen Nullstellen Schwierigkeiten hatten: Wie wir gerade gesehen haben , muß Δ dann negativ sein; die Quadratwurzel in der Lösungsformel liefert also einen imaginären Wert. Obwohl es drei reelle Nullstellen gibt, müssen wir also zu deren Berechnung die Kubikwurzel einer nichtreellen komplexen Zahl finden.

§4: Isolation der reellen Nullstellen

Der Satz von STURM sagt uns für jedes Intervall $[a, b]$, wie viele Nullstellen des Polynoms f dort liegen. Wenn wir uns für die Nullstellen eines Polynoms interessieren, geht es aber eher darum, eine Liste möglichst kleiner Intervalle zu finden die jeweils genau eine Nullstelle von f enthalten. STURM hat auch gezeigt, wie das möglich ist: Sobald wir ein Intervall kennen, in dem alle reellen Nullstellen liegen, können wir durch fortgesetzte Intervallhalbierungen zu einer Liste von Intervallen kommen, die jeweils genau eine Nullstelle enthalten. Durch weitere Halbierungen können wir gegebenenfalls auch die Länge dieser Intervalle beliebig kurz machen.

Für das Ausgangsintervall brauchen wir eine Abschätzung für die Größe der reellen Nullstellen eines Polynoms

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 .$$

An den Nullstellen dieses Polynoms ändert sich nichts, wenn wir es mit einer von Null verschiedenen Konstanten multiplizieren; eine gute Schranke sollte daher nur von den Quotienten a_i/a_n abhängen. Um nicht ständig mit diesen Quotienten hantieren zu müssen, beschränken wir uns in der folgenden Diskussion auf normierte Polynome.

Es gibt eine ganze Reihe von Schranken für die Nullstellen eines Polynoms; am einfachsten und für uns völlig ausreichend ist die folgende, die CAUCHY bereits 1829 veröffentlichte:

Lemma: z sei eine reelle Nullstelle des Polynoms

$$f = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 ,$$

und J sei die Menge aller Indizes i mit $a_i < 0$; die Elementanzahl von J sei m. Für $m = 0$ ist $z \le 0$, ansonsten ist z kleiner als das Maximum aus eins und den Zahlen $\sqrt[n-k]{|ma_k|}$ für $k \in J$.

Beweis: Ist $J = \emptyset$, so kann es nach der Regel von DESCARTES keine positiven Nullstellen geben, also ist $z \le 0$. Andernfalls sei S das Maximum aus eins und den Zahlen $\sqrt[n-k]{|ma_k|}$ mit $k \in J$. Für jedes solche k ist dann $|ma_k| \le S^{n-k}$. Damit ist auch für jedes $x > S$

$$x^n > |ma_k|\, x^k = -ma_k x^k .$$

Addieren wir diese Gleichungen für alle $k \in J$, folgt, daß

$$mx^n > i - m \sum_{k \in J} a_k x^k \quad \text{und} \quad x^n + \sum_{k \in J} a_k x^k > 0 .$$

Da $a_k x^k$ für alle $k \neq J$ größer oder gleich null ist, ist damit auch $f(x) > 0$; ein $x > S$ kann also keine Nullstelle sein. ∎

Als Beispiel betrachten wir das Polynoms $f = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$. Hier ist $J = \{0, 3, 4\}$, also $m = 3$. Unter den Zahlen 6, $\sqrt{9} = 3$ und $\sqrt[5]{3}$ ist 6 die größte, also ist jede reelle Nullstelle kleiner oder gleich sechs.

Um auch eine untere Schranke für die reellen Nullstellen zu erhalten, betrachten wir das Polynom $f(-x)$ oder besser, da $f(-x)$ den höchsten Term $-x^5$ hat, das Polynom $-f(-x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 1$. Hier ist $J = \{2, 3\}$, also $m = 2$, und unter den Zahlen $\sqrt{6}$ und $\sqrt[3]{4}$ ist $\sqrt{6}$ die größere, denn $\sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{8} = 2$, aber $\sqrt{6} > \sqrt{4} = 2$. Damit wissen wir, daß alle reellen Nullstellen z von f die Ungleichung $-\sqrt{6} \le z \le 6$ erfüllen.

Baron AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789–1857) stellte als erster durch die exakte Definition von Begriffen wie *Konvergenz* und *Stetigkeit* die Analysis auf ein sicheres Fundament. In insgesamt 789 Arbeiten beschäftigte er sich u.a. auch mit komplexer Analysis, Variationsrechnung, Differentialgleichungen, FOURIER-Analysis, Permutationsgruppen, der Diagonalisierung von Matrizen und der theoretischen Mechanik. Als überzeugter Royalist hatte er häufig Schwierigkeiten mit den damaligen Regierungen; er lebte daher mehrere Jahre im Exil in Turin und später in Prag, wo er (mit sehr mäßigem Erfolg) den französischen Thronfolger unterrichtete.

Sobald wir ein Intervall $[a, b]$ kennen, in dem alle reellen Nullstellen eines Polynoms f liegen, ist eigentlich klar, wie das STURMsche Intervallhalbierungsverfahren funktioniert: Wir suchen eine Liste N von Intervallen $[a_i, b_i]$ mit der Eigenschaft, daß jedes dieser Intervalle genau eine Nullstelle von f enthält; eventuell können wir auch noch fordern, daß die Länge jedes dieser Intervalle unter einer gewissen Schranke s liegt.

Wir arbeiten mit einer Liste L bestehend aus noch zu untersuchenden Intervallens $[c, d]$ zusammen mit den Anzahlen der Vorzeichenwechsel in den STURMschen Ketten $S_f(c)$ und $S_f(d)$. Zu beginn enthält L nur das Intervall $[a, b]$.in dem alle reellen Nullstellen liegen, zusammen mit den Vorzeichenwechseln von $S_f(a)$ und $S_f(b)$.

So lange die Liste $\mathcal{L}$ nicht leer ist, wählen wir eines der dort befindlichen Intervalle $[c, d]$ aus und berechnen nach STURM die Anzahl der dort befindlichen Nullstellen. Wenn es keine gibt, eliminieren wir das Intervall, falls es nur eine ist (und gegebenenfalls die Intervallänge unter der Schranke s liegt), kommt das Intervall in die Ergebnisliste $\mathcal{M}$.

Andernfalls wählen wir einen Punkt $t \in (c, d)$, z.B. den Mittelpunkt $t = \frac{1}{2}(c + d)$, und berechnen die STURMsche Kette $S_f(t)$; danach wird $[c, d]$ in der Liste $\mathcal{L}$ ersetzt durch die beiden Intervalle $[c, t]$ umd $[t, d]$.

Um diesen Algorithmus auf das obige Beispiel anwenden zu können, müssen wir zunächst die STURMsche Kette von f berechnen, am besten nachdem wir uns vergewissert haben, daß f irreduzibel ist:

```
> f := x^5 - 2*x^4 - 3*x^3 + 2*x^2 - 1:
> factor(f);
```

$$x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$$

```
> f1 := diff(f, x);
```

$$f1 := 5x^4 - 8 * x^3 - 9x^2 + 4x$$

```
> f2 := -rem(f, f1, x);
```

$$f2 := \frac{46}{25}x^3 - \frac{12}{25}x^2 + 1 - \frac{8}{25}x$$

Da es uns nur um Vorzeichen geht, multiplizieren wir mit dem (Haupt-)nenner der Koeffizienten:

```
> f2 := 25*f;
```

$$f2 := 46x^3 - 12x^2 + 25 - 8x$$

```
> f3 := -rem(f1, f2, x);
```

$$f3 := \frac{5225}{529}x^2 - \frac{125}{1058}x - \frac{1925}{529}$$

```
> f3 := 1058/25*f3;
```

$$f3 := 418 * x^2 - 5 * x - 154$$

```
> f4 := -rem(f2, f3, x);
```

$$f4 := -\frac{82524}{3971} - \frac{769695}{87362}x$$

```
> f5 := -rem(f3, f4, x);
```

$$f5 := -\frac{513601198}{235225}$$

```
> f5 := 1:
```


Wir wissen, daß alle reellen Nullstellen zwischen $-\sqrt{6}$ und 6 liegen; um ganze Zahlen zu haben. starten wir mit dem Intervall $[-3, 6]$ und werten die STURMsche an dessen Endpunkten aus. Dazu müssen wir in der Liste `[f, f1, f2, f3, f4, f5]` den gerade betrachteten Punkt für x einsetzen und die Vorzeichenwechsel zählen.

Zum Einsetzen können wir natürlich den `subs`-Befehl von Maple benutzen, allerdings müssen wir ihn für die sechs Elemente der Liste sechsmal eintippen. Zum Glück kennt Maple ein Kommando, das uns dies erspart: Der Befehl `map(`G`, [`$f_1, \ldots, f_n$`])` wendet G auf jedes Element der Liste an, liefert also die Liste $[G(f_1), \ldots, G(f_n)]$. Das `subs`-Kommando können wir hier allerdings nicht für G einsetzen, denn es hat ja *zwei* Argumente. Dafür gibt es den Befehl `map2([`G`, `x`, [`$f_1, \ldots, f_n$`])`, der die Liste aus den Elementen $G(x, f_i)$ konstruiert. Mit

```
> map2(subs, x=-3, [f, f1, f2, f3, f4, f5]);
```

erhalten wir also die Funktionswerte an der Stelle $x = -3$:

$$[-307, 528, -1301, 3623, 493557, -1]$$

Bequemer wird es, wenn wir noch sie Signum-Funktion `sign` darauf anwenden und das ganze als eine Funktion schreiben:

```
> Sturm := t -> map(sign,
>          map2(subs, x=t, [f, f1, f2, f3, f4, f5])):
```

Damit können wir nun direkt die Vorzeichenfolge an einer Stelle $x = t$ berechnen:

```
> Sturm(-3);
```

$$[-1, 1, -1, 1, 1, -1]$$

```
> Sturm(6);
```

$$[1, 1, 1, 1, -1, -1]$$

Für $x = -3$ haben wir also vier Vorzeichenwechsel, für $x = 6$ nur einen. Damit hat f drei reelle Nullstellen.

Wir unterteilen das Intervall an der Stelle $x = 2$ und berechnen die STURMsche Kette:

```
> Sturm(2);
```

$$[-1, -1, 1, 1, -1, -1]$$