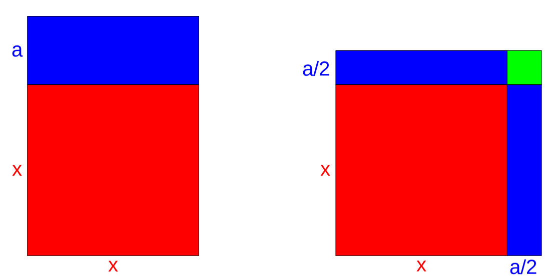
Kapitel 1
Nullstellen von Polynomgleichungen

§1: Quadratische Ergänzung

Um 830 legte der arabische Gelehrte MUHAMMAD IBN MUSA ABU DSCHA'FAR AL-CHWARIZMI sein zweites Buch *Al-Kitāb al-muchtasar fi hisab al-dschabr wa-l-muqabala* (Rechnen durch Ergänzung und Ausgleich) vor; *al-dschabr* gab der Algebra ihren Namen und AL-CHWARIZMI führte zum Wort Algorithmus. Das Buch befaßte sich mit systematischen Lösungsverfahren für lineare und quadratische Gleichungen, die auch geometrisch motiviert und veranschaulicht wurden.

Wenn wir beispielsweise die quadratische Gleichung $x^2 + ax = b$ geometrisch interpretieren wollen, suchen wir nach einem Quadrat einer unbekannten Seitenlänge x derart, daß die Fläche des Quadrats zusammen mit der des Rechtecks mit Seiten x und a gleich b ist.



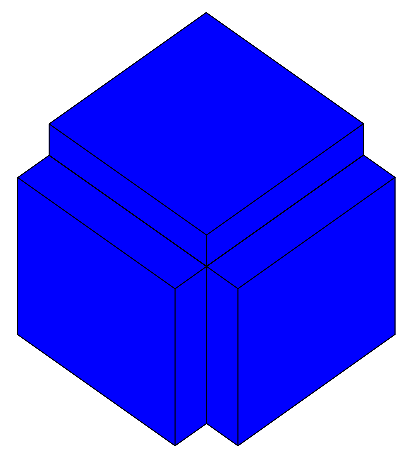
Die linke Zeichnung zeigt dieses Quadrat und darüber das Rechteck; auf der rechten Seite ist die Hälfte des Rechtecks neben das Quadrat gewandert, so daß abgesehen von dem kleinen Quadrat rechts oben

nun ein Quadrat mit Seitenlänge $x + \frac{a}{2}$ entstanden ist. Die Größe des kleinen Quadrats ist bekannt: Seine Seitenlänge ist $\frac{a}{2}$. Wir suchen somit eine Zahl x derart, daß das Quadrat mit Seitenlänge $x + \frac{a}{2}$ die Fläche $b + \frac{a^2}{4}$ hat; das Problem ist also zurückgeführt auf das Ziehen einer Quadratwurzel:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}\,.$$

Dieses Verfahren war zumindest grundsätzlich in allen frühen Hochkulturen bekannt; die ersten bekannten Hinweise darauf finden sich bereits vor über vier Tausend Jahren bei den Babyloniern.

Wenn wir versuchen, für die Gleichungen $x^3 + ax^2 = b$ ähnlich zu argumentieren, müssen wir ins Dreidimensionale gehen und auf den Würfel mit Kantenlänge x eine quadratische Säule mit Basisquadrat der Seitenlänge x und Höhe a stellen. Um sie so zu verteilen, daß wir möglichst nahe an einen neuen Würfel kommen, müssen wir jeweils ein Drittel davon auf drei der Seitenflächen des Würfels platzieren:



Leider fehlt hier nun nicht nur ein Würfel der Kantenlänge $\frac{a}{3}$, sondern auch noch drei quadratische Säulen der Höhe x auf Grundflächen mit Seitenlänge $\frac{a}{3}$. Wir können das Volumen des Würfels mit Seitenlänge $x + \frac{a}{3}$ also nicht einfach durch die bekannten Größen a, b ausdrücken, sondern haben auch noch einen Term mit der Unbekannten x.

Trotzdem ist diese Idee nützlich, sogar für Gleichungen höheren Grades. Die allgemeine Gleichung n-ten Grades hat die Form

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0\,,$$

wobei wir natürlich voraussetzen, daß a_n nicht verschwindet. Falls wir über einem Körper wie $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ arbeiten, können wir durch a_n dividieren und erhalten die neue Gleichung

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0$$

mit höchstem Koeffizienten eins.

Geometrisch betrachtet wollen wir einen n-dimensionalen Hyperwürfel bekommen, dessen Seitenlänge $x+\frac{c_{n-1}}{n}$ sein sollte; rechnerisch bedeutet dies, daß wir die neue Variable $y = x + \frac{c_{n-1}}{n}$ betrachten und überall in der Gleichung x durch $y - \frac{c_{n-1}}{n}$ ersetzen:

$$\begin{aligned}
&x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1 x + c_0\\
&= \left(y - \frac{c_{n-1}}{n}\right)^n + c_{n-1}\left(y - \frac{c_{n-1}}{n}\right)^{n-2} + \cdots + c_1\left(y - \frac{c_{n-1}}{n}\right) + c_0\\
&= \left(y^n - c_{n-1}y^{n-1} + nc_{n-1}^2 y^{n-2} + \cdots\right)\\
&\quad + c_{n-1}\left(y^{n-1} - \frac{(n-1)c_{n-1}}{n}y^{n-2} + \cdots\right)\\
&\quad + c_{n-2}\left(y^{n-2} - \frac{(n-2)c_{n-1}}{n}y^{n-3} + \cdots\right)\\
&\quad + \cdots\\
&= y^n + \left(nc_{n-1}^2 - \frac{(n-1)c_{n-1}^2}{n} + c_{n-2}\right) y_{n-2} + \cdots\,.
\end{aligned}$$

Wir kommen also auf ein Polynom n-ten Grades in y, das keinen Term mit y^{n-1} hat.

Im Falle $n = 2$ hat dieses Polynom die Form y^2+p, wir können also seine Nullstellen einfach durch Wurzelziehen ermitteln. Für $n > 2$ haben wir immerhin einen Term weniger als in der allgemeinen Gleichung n-ten Grades und müssen sehen, ob uns das bei der Lösung helfen kann.

§2: Polynome in Computeralgebrasystemen

Die Elimination des zweithöchsten Terms läßt sich für Gleichungen nicht allzu hohen Grades problemlos explizit durchführen, ist aber eine eher unangenehme und ziemlich langweilige Rechnung. Gerade in der Computeralgebra sollte man so etwas besser einem Computer überlassen.

Computeralgebrasysteme sind Programme zum symbolischen Rechnen, die genau für solche Zwecke entwickelt wurden – auch wenn ihre Fähigkeiten heute meist weit darüber hinausgehen. Hier soll beispielhaft das Computeralgebrasystem Maple betrachtet werden; in anderen Systemen werden die Befehle zwar im allgemeinen etwas anders aussehen, bezüglich der grundsätzlichen Fähigkeiten gibt es aber keine nennenswerten Unterschiede.

In Maple werden mathematische Ausdrücke, die nur Grundrechenarten enthalten, in der üblichen mathematischen Notation eingegeben, allerdings darf das Multiplikationszeichen `*` nie weggelassen werden. Für die Exponentiation wird das Zeichen `^` verwendet, für Zuweisungen `:=`. Als Variablen können (unter anderem) alle mit einem Buchstaben beginnenden Folgen aus Buchstaben und Ziffern verwendet werden; abgeschlossen wird ein Befehl im allgemeinen mit einem Strichpunkt. Die Definition eines Polynoms vom Grad drei kann somit in der Form

```
> P := x^3 + a*x^2 + b*x + c;
```

eingegeben werden. Maple quittiert diesen Befehl mit der Ausgabe

$$P := x^3 + ax^2 + bx + c$$

Wie wir bald sehen werden, ist das nicht immer wünschenswert; Zwischenergebnisse können in der Computeralgebra oft sehr umfangreich sein und mehrere Bildschirmseiten in Anspruch nehmen. Falls die Ausgabe des Ergebnisses nicht erwünscht ist, muß der Befehl einfach mit einem Doppelpunkt anstelle eines Semikolons abgeschlossen werden.

Um den quadratischen Term von P zu eliminieren, müssen wir das Polynom in der neuen Variable $y = x + \frac{a}{3}$ schreiben; dies leistet der Substitutionsbefehl

```
> Q := subs(x = y - a/3, P);
```

$$Q := \left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c$$

Einige ältere Computeralgebrasysteme wie beispielsweise REDUCE hätten gleich ausmultipliziert; die meisten heute gebräuchlichen Systeme verzichten darauf, sofern es nicht explizit verlangt wird. Der Befehl zum Ausmultiplizieren heißt `expand`:

```
> expand(Q);
```

$$y^3 - \frac{ya^2}{3} + \frac{2a^3}{27} + by - \frac{ba}{3} + c$$

Das Ergebnis sieht ziemlich nach Kraut und Rüben aus, allerdings war das auch nicht anders zu erwarten: Zwar betrachten wir y als die Variable dieses Polynoms und a, b, c als Parameter, aber das kann Maple nicht wissen. So wie wir P und Q eingegeben haben, sind a, b, c, x und y gleichberechtigte Variablen.

Wenn wir einen Ausdruck f als Polynom in y dargestellt sehen wollen, müssen wir den Befehl `collect(f, y)` eingeben; zum Sortieren der Terme von f nach Potenzen von y dient `sort(f, y)`. Für ein übersichtliches Ergebnis sollten wir hier gleich beides anwenden. Da wir dem letzten Ergebnis keinen Namen gegeben haben, müssen wir auch noch eine neue Variable kennen lernen: `%` bezeichnet in Maple stets das Ergebnis der letzten Ausgabe; daneben gibt es noch `%%` für die vorletzte und `%%%` für die drittletzte.

Damit ist klar, wie es weitergeht:

```
> R := sort(collect(%, y), y);
```

$$R := y^3 + \left(-\frac{a^2}{3} + b\right) y + \frac{2a^3}{27} + c - \frac{ba}{3}$$

Somit haben wir ein Polynom der Form $y^3 + py + q$ gefunden; mit dem Befehl `coeff(f, y^n)` oder `coeff(f, y, n)` können wir p und q noch isolieren, wobei für q natürlich nur die zweite Form in Frage kommt. Alternativ läßt sich q auch isolieren, indem wir y einfach auf Null setzen:

```
> p := coeff(R, y); q := subs(y=0, R);
```


$$p := -\frac{a^2}{3} + b$$
$$q := \frac{2a^3}{27} + c - \frac{ba}{3}$$

Wir können das Ergebnis für q auch noch etwas sortierter darstellen:

```
> sort(q, [a, b, c]);
```

$$\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$$

§3: Kubische Gleichungen

Unser nächstes Ziel ist es, die Gleichung

$$y^3 + py + q = 0$$

explizit zu lösen. Auch wenn die Griechen geometrische Konstruktionen (jenseits von Zirkel und Lineal) kannten, mit denen sie Lösungen kubischer Gleichungen konstruieren konnten, sollte es noch bis ins 16. Jahrhundert dauern, bevor eine explizite Lösungsformel gefunden war – ein Zeichen dafür, daß der Lösungsansatz nicht gerade offensichtlich ist.

Der Trick, der schließlich zum Erfolg führte, ist folgender: Wir schreiben die Variable y als Summe zweier neuer Variablen u und v und machen dadurch das Problem auf den ersten Blick nur schwieriger. Andererseits ist diese Summendarstellung natürlich alles andere als eindeutig; wir können daher hoffen, daß es auch dann noch Lösungen gibt, wenn wir an u und v zusätzliche Forderungen stellen und dadurch das Problem vielleicht vereinfachen.

Einsetzen von $y = u + v$ führt auf die Bedingung

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0\,.$$

Dies können wir auch anders zusammenfassen als

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u+v) = 0\,,$$

und natürlich verschwindet diese Summe insbesondere dann, wenn beide Summanden einzeln verschwinden. Falls es uns also gelingt, zwei Zahlen u, v zu finden mit

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{und} \quad 3uv = -p\,,$$

haben wir eine Lösung gefunden.

Zwei solche Zahlen u, v erfüllen erst recht die schwächere Bedingung

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{und} \quad u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{27}\,,$$

wir kennen also die Summe und das Produkt ihrer dritten Potenzen. Damit kennen wir aber auch u^3 und v^3:

Haben zwei Zahlen h, k das Produkt r und die Summe s, so sind h und k die beiden Nullstellen der Gleichung

$$(z-h)(z-k) = z^2 - (h+k)z + hk = z^2 - sz + r = 0\,;$$

falls wir r und s kennen, erhalten wir h und k also einfach als Lösungen einer quadratischen Gleichung:

$$h = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - r} \quad \text{und} \quad k = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - r}$$

oder umgekehrt.

In unserem Fall ist daher

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$
$$\text{und} \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\,,$$

wobei es auf die Reihenfolge natürlich nicht ankommt.

Somit kennen wir u^3 und v^3. Für u und v selbst gibt es dann jeweils drei Möglichkeiten, Allerdings führen nicht alle neun Kombinationen dieser Möglichkeiten zu Lösungen, denn für eine Lösung muß ja die Bedingung $3uv = -p$ erfüllt sein, nicht nur $u^3 \cdot v^3 = -\frac{1}{27}p^3$.

Dies läßt sich am besten dadurch gewährleisten, daß wir für u *irgendeine* der drei Kubikwurzeln von u^3 nehmen und dann $v = -p/3u$ setzen. Die drei Lösungen der kubischen Gleichung $y^3 + py + q = 0$ sind also

$$y = u - \frac{p}{3u} \quad \text{mit} \quad u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,,$$

wobei für u nacheinander jede der drei Kubikwurzeln eingesetzt werden muß. (Es spielt keine Rolle, welche der beiden Quadratwurzeln wir nehmen, denn ersetzen wir die eine durch die andere, vertauschen wir dadurch einfach u und v.)

Da selbst von den drei Kubikwurzeln einer reellen Zahl nur eine reell ist, müssen wir zur Bestimmung aller drei Lösungen einer kubischen Gleichung *immer* auch mit komplexen Zahlen rechnen, selbst wenn sowohl Koeffizienten als auch Lösungen allesamt reell sind.

Betrachten wir dazu als einfaches Beispiel die Gleichung

$$(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6\,;$$

sie hat nach Konstruktion die drei Lösungen $1, 2$ und 3.

Falls wir das nicht wüßten, würden wir als erstes durch die Substitution $y = x - 2$ den quadratischen Term eliminieren. Einsetzen von $x = y + 2$ liefert

$$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 11(y+2) - 6$$
$$= y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 + 11y + 22 - 6 = y^3 - y\,,$$

wir müssen also zunächst die Gleichung $y^3 - y = 0$ lösen. Hierzu brauchen wir selbstverständlich keine Lösungstheorie kubischer Gleichungen: Ausklammern von y und die dritte binomische Formel zeigen sofort, daß

$$y^3 - y = y(y^2 - 1) = y(y+1)(y-1)$$

genau an den Stellen $y = -1, 0, 1$ verschwindet, und da $x = y + 2$ ist, hat die Ausgangsgleichung die Lösungen $x = 1, 2, 3$.

Wenden wir trotzdem unsere Lösungsformel an: Bei dieser Gleichung ist $p = -1$ und $q = 0$, also

$$u = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-1}{27}}} = \sqrt[6]{\frac{-1}{27}} = \sqrt{\frac{-1}{3}}$$

für die rein imaginäre Kubikwurzel. Das zugehörige v muß die Gleichung $uv = \frac{1}{3}$ erfüllen, also ist $v = -u$ und wir erhalten als erste Lösung $y = u + v = 0$.

Die beiden anderen Kubikwurzeln erhalten wir, indem wir die reelle Kubikwurzel mit einer der beiden komplexen dritten Einheitswurzeln multiplizieren, d.h. also mit

$$\rho = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2} \quad \text{und} \quad \bar{\rho} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,i}{2}$$

Im ersten Fall ist

$$u = \sqrt{\frac{-1}{3}}\rho = \frac{\sqrt{3}}{3}i\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

und

$$v = \frac{1}{3u} = \frac{-2}{3 + \sqrt{3}\,i} = \frac{-2(3 - \sqrt{3}\,i)}{3^2 + (\sqrt{3})^2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\,;$$

wir erhalten somit die Lösung $y = u + v = -1$.

Die dritte Kubikwurzel

$$u = \sqrt{\frac{-1}{3}}\bar{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{3}i\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

schließlich führt auf

$$v = \frac{1}{3u} = \frac{2}{3 - \sqrt{3}\,i} = \frac{2(3 + \sqrt{3}\,i)}{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

und liefert so die Lösung $y = u + v = 1$.

Etwas komplizierter wird es bei der Gleichung

$$x^3 - 7x + 6 = 0\,.$$

Da sie keinen x^2-Term hat, können wir gleich $p = -7$ und $q = 6$ in die Formel einsetzen und erhalten

$$u = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{9 - 7^3}{27}}} = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{3}\,i}\,.$$

Was nun? Wenn wir einen Ansatz der Form $u = r + is$ machen, kommen wir auf ein System von zwei kubischen Gleichungen in zwei Unbekannten, also ein schwierigeres Problem als unsere Ausgangsgleichung. Wir können auch Maple nach dem Wert dieser Kubikwurzel fragen: Die imaginäre Einheit i wird dort als großes I eingegeben und Wurzeln (abgesehen von der auch als `sqrt` darstellbaren Quadratwurzel) durch Potenzen mit gebrochenem Exponenten; wir tippen also

```
> (-3 + 10/9*sqrt(3)*I)^(1/3);
```

$$\left(-3 + \frac{10}{9}I\sqrt{3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

und erhalten unsere Eingabe unausgerechnet zurück. Mit dem Befehl `evalc` können wir Maple veranlassen, das Ergebnis – falls möglich – in der Form $a + bi$ darzustellen:

```
> evalc(%);
```

$$\frac{1}{9}7^{\left(\frac{1}{3}\right)}9^{\left(\frac{2}{3}\right)}21^{\left(\frac{1}{6}\right)}\left(\cos\left(-\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{10\sqrt{3}}{27}\right) + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$+\frac{1}{9}i7^{\left(\frac{1}{3}\right)}9^{\left(\frac{2}{3}\right)}21^{\left(\frac{1}{6}\right)}\left(\sin\left(-\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{10\sqrt{3}}{27}\right) + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Dieses Ergebnis ist offensichtlich noch nicht in der bestmöglichen Weise dargestellt; mit dem Kommando `simplify` können wir Maple dazu überreden, sich etwas mehr Mühe zu geben:

```
> u := simplify(%);
```

$$u := \frac{1}{3}\sqrt{7}\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{10\sqrt{3}}{27}\right) + \frac{\pi}{3}\right)\right.$$
$$\left. + \sin\left(-\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{10\sqrt{3}}{27}\right) + \frac{\pi}{3}\right)i\right)$$

Maple arbeitet hier also mit der Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen: Jede komplexe Zahl z läßt sich darstellen als

$$z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,$$

und

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|}\left(\cos\tfrac{\varphi}{3} + i\sin\tfrac{\varphi}{3}\right).$$

Leider gibt es keine einfache Formel, die Sinus und Kosinus von $\frac{\varphi}{3}$ durch $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ausdrückt. Aus den Additionstheoremen können wir uns natürlich leicht Formeln für $\cos 3\alpha$ und $\sin 3\alpha$ verschaffen; wenn wir das nicht selbst ausrechnen wollen, tut es Maple für uns:

```
> expand(cos(3*alpha));
```

$$4\cos(\alpha)^3 - 3\cos(\alpha)$$

Um $x = \cos\frac{\varphi}{3}$ zu berechnen, müssen wir also die kubische Gleichung $4x^3 - 3x = \cos\varphi$ lösen, was uns wiederum auf die Berechnung einer Kubikwurzel führt *usw.*

Trotzdem ist die obige Darstellung der Lösung nicht völlig nutzlos: Sie gibt uns immerhin Formeln für den Real- und den Imaginärteil der Lösung, und diese Formeln können wir numerisch auswerten. Der Maple-Befehl dafür heißt `evalf`, wobei das `f` für *floating point* steht, d.h. also für Gleitkommaarithmetik.

```
> evalf(u);
```

$$1.000000001 + 1.154700538\,I$$

Wie jedes numerische Ergebnis stimmt diese Zahl natürlich nur näherungsweise, und zumindest in diesem Fall ist die Hypothese, daß es sich beim Realteil um eine durch Rundungsfehler verfälschte Eins handeln kann, eine Überlegung wert. Falls dem so sein sollte, ist

$$\cos\left(-\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{10}{27}\sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}\,,$$

und daraus folgt dann über die Beziehung $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, daß

$$\sin\left(-\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{10}{27}\sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right) = \pm\sqrt{1 - \frac{3}{7}} = \pm\sqrt{\frac{4}{7}} = \pm\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

und

$$u = 1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{7}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}i = 1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

ist. Bislang war alles noch Spekulation; nun kommt die Probe:

$$\left(1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}i\right)^3 = 1 \pm 2\sqrt{3}\,i - 4 \mp \frac{8}{9}\sqrt{3}\,i = -3 \pm \frac{10}{9}\sqrt{3}\,i\,,$$

also ist $u = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}i$. Das zugehörige v ist

$$v = \frac{7}{3u} = \frac{7}{3 + 2\sqrt{3}\,i} = \frac{7(3 - 2\sqrt{3}\,i)}{3^2 + 2^2\cdot 3} = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}i\,.$$

Damit ist die erste Lösung

$$x = u + v = 2$$

gefunden. Die beiden anderen sind nun (etwas langwierige) Routine, können also beruhigt Maple überlassen werden:

```
> rho := -1/2 + sqrt(3)/2*I; u := 1 + 2/3*sqrt(3)*I;
```

$$\rho := -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}$$
$$u := 1 + \frac{2}{3}I\sqrt{3}$$

```
> evalc(u*rho + 7/(3*u*rho));
```

$$-3$$

```
> evalc(u*conjugate(rho) + 7/(3*u*conjugate(rho)));
```

$$1$$

Obwohl die drei Lösungen $1, 2$ und -3 unserer Gleichung allesamt ganzzahlig sind, konnten wir dies also durch bloßes Einsetzen in unsere Formel nicht erkennen und konnten insbesondere die Kubikwurzel nur durch Erraten und Nachprüfen in einer einfachen Form darstellen.

Wenn wir eine reelle Kubikwurzel finden können, ist die Situation auch nicht unbedingt viel besser. Betrachten wir etwa die Gleichung

$$x^3 - 3x^2 + 9x + 13 = 0\,.$$

Hier setzen wir $x = y + 1$ und erhalten die neue Gleichung

$$\begin{aligned}(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 9(y+1) + 13 \\ = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3(y^2 + 2y + 1) + 9y + 9 + 13 \\ = y^3 + 6y + 20 = 0\end{aligned}$$

mit $p = 6$ und $q = 20$. Damit ist $\frac{p}{3} = 2$ und $\frac{q}{2} = 10$, also

$$u = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{100 + 8}} = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}} = \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}}$$

Da 108 größer ist als $(-10)^2 = 100$, gibt es eine positive reelle Wurzel; wir rechnen zunächst mit dieser und erhalten als erste Lösung

$$y_1 = u - \frac{p}{3u} = \sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}}}\,.$$

Damit haben wir im Prinzip eine Lösung gefunden, die auch Maple nicht weiter vereinfachen kann:

```
> u := (-10 + 6*sqrt(3))^(1/3); simplify(u - 2/u);
```

$$u := (-10 + 6\sqrt{3})^{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$\frac{(-10 + 6\sqrt{3})^{\left(\frac{2}{3}\right)} - 2}{(-10 + 6\sqrt{3})^{\left(\frac{1}{3}\right)}}$$

Wenn wir das allerdings numerisch auswerten, drängt sich wieder die Hypothese auf, daß hier tatsächlich etwas sehr viel einfacheres steht:

```
> evalc(%);
```

$$-1.999999986$$

Einsetzen von $y = -2$ in unsere kubische Gleichung zeigt in der Tat, daß

$$(-2)^3 + 6 \cdot (-2) + 20 = -8 - 12 + 20 = 0$$

ist. Aber warum ist

$$\sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{-10 + 6\sqrt{3}}} = -2\,,$$

und wie, vor allem, kann man das der linken Seite ansehen?

Wie die Erfahrung der Computeralgebra zeigt, kann es extrem schwierig sein, auch nur zu entscheiden, ob zwei Wurzelausdrücke gleich sind; direkte allgemeine Verfahren dazu gibt es nicht. Unsere Formel gibt uns daher zwar immer drei Wurzelausdrücke, die Lösungen der gegebenen Gleichung sind, aber diese können für Zahlen stehen, die sich auch sehr viel einfacher ausdrücken lassen.

Im vorliegenden Fall, wo die numerische Berechnung eine Vermutung nahelegt, können wir wieder versuchen, diese zu beweisen: Aus der vermuteten Gleichung

$$u - \frac{2}{u} = -2 \quad \text{folgt} \quad u^2 - 2 = -2u\,.$$

Quadratische Ergänzung macht daraus $(u+1)^2 = 3$, also ist $u = -1 \pm \sqrt{3}$. Die dritte Potenz davon ist

$$(-1 \pm \sqrt{3})^3 = -1 \pm 3\sqrt{3} - 3 \cdot 3 \pm 3\sqrt{3} = -10 \pm 6\sqrt{3}\,,$$

also ist tatsächlich $u = -1 + \sqrt{3}$ und

$$\begin{aligned}y_1 &= -1 + \sqrt{3} - \frac{2}{-1 + \sqrt{3}} = -1 + \sqrt{3} - \frac{2(-1 - \sqrt{3})}{(-1 + \sqrt{3})(-1 - \sqrt{3})} \\ &= -1 + \sqrt{3} + \frac{2 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2\,.\end{aligned}$$

Nachdem wir u in einfacher Form ausgedrückt haben, lassen sich nun auch die anderen beiden Lösungen berechnen:

$$u\rho = (-1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2} = \frac{(1 - \sqrt{3}) + (3 - \sqrt{3})i}{2}$$

und

$$u\bar{\rho} = (-1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2} = \frac{(1 - \sqrt{3}) - (3 - \sqrt{3})i}{2}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\frac{2}{u\rho} &= \frac{4\big((1 - \sqrt{3}) - (3 - \sqrt{3})i\big)}{(1 - \sqrt{3})^2 + (3 - \sqrt{3})^2} = \frac{4\big((1 - \sqrt{3}) - (3 - \sqrt{3})i\big)}{16 - 8\sqrt{3}} \\ &= \frac{\big((1 - \sqrt{3}) - (3 - \sqrt{3})i\big)(2 + \sqrt{3})}{2(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{-(1 + \sqrt{3}) - (3 + \sqrt{3})i}{2}\,,\end{aligned}$$

also

$$y_2 = u\rho - \frac{2}{u\rho} = \frac{(1-\sqrt{3})+(3-\sqrt{3})i}{2} + \frac{(1+\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})i}{2} = 1+3i\,.$$

Entsprechend folgt $y_3 = u\bar\rho - \dfrac{2}{u\bar\rho} = 1 - 3i$.

§4: Biquadratische Gleichungen

Auch biquadratische Gleichungen lassen sich auflösen: Hier eliminiert man den kubischen Term von

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

durch die Substitution $y = x + \frac{a}{4}$; dies führt auf eine Gleichung der Form

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0\,.$$

Zu deren Lösung benutzen wir einen anderen Trick als im kubischen Fall: Wir versuchen, die Quadrate der Nullstellen durch eine geeignete Verschiebung zu Lösungen einer quadratischen Gleichung zu machen, die wir dann mit der bekannten Lösungsformel auflösen können.

Wir nehmen also an, wir hätten eine Lösung z dieser Gleichung und betrachten dazu für eine zunächst noch beliebige Zahl u die Zahl z^2+u. Da $z^4 + pz^2 + qz + r$ verschwindet, ist $z^4 = -pz^2 - qz - r$, also

$$(z^2+u)^2 = z^4 + 2uz^2 + u^2 = (2u-p)z^2 - qz + u^2 - r\,.$$

Falls rechts das Quadrat eines linearen Polynoms $sz+t$ steht, ist

$$(z^2+u)^2 = (sz+t)^2 \Longrightarrow z^2 + u = \pm(sz+t)\,,$$

wir müssen also nur die beiden quadratischen Gleichungen

$$z^2 \mp (sz+t) + u = 0$$

lösen, um die Lösungen der biquadratischen Gleichung zu finden.

Natürlich ist die rechte Seite $(2u-p)z^2 - qz + u^2 - r$ im allgemeinen kein Quadrat eines linearen Polynoms in z; wir können aber hoffen, daß

es zumindest für gewisse spezielle Werte der bislang noch willkürlichen Konstante u eines ist.

Ein quadratisches Polynom $\alpha z^2 + \beta z + \gamma$ ist genau dann Quadrat eines linearen, wenn die beiden Nullstellen der quadratischen Gleichung $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ übereinstimmen. Diese Nullstellen können wir einfach berechnen:

$$z^2 + \frac{\beta}{\alpha}z + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Longrightarrow z = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}}\,.$$

Die Ausgangsgleichung ist genau dann das Quadrat eines linearen Polynoms, wenn beide Lösungen übereinstimmen, wenn also der Ausdruck unter der Wurzel verschwindet. Bringen wir diesen auf den Hauptnenner, kommen wir auf die Bedingung $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$. In unserem Fall ist $\alpha = (2u-p)$, $\beta = -q$ und $\gamma = u^2 - r$; wir erhalten also die Bedingung

$$q^2 - 4(2u-p)(y^2-r) = -8u^3 + 4pu^2 + 8ru + q^2 - 4pr = 0\,.$$

Dies ist eine kubische Gleichung für u, die wir mit der Methode aus dem vorigen Abschnitt lösen können. Ist u_0 eine der Lösungen, so steht in der Gleichung

$$(z^2+u_0)^2 = (2u_0-p)z^2 - qz + u_0^2 - r\,.$$

rechts das Quadrat eines linearen Polynoms in z, das wir – da wir alle Koeffizienten kennen – problemlos hinschreiben können. Dies führt dann nach Wurzelziehen zu zwei quadratischen Gleichungen für z, deren Wurzeln die Nullstellen der biquadratischen Gleichung sind.

Es wäre nicht schwer, mit Hilfe der Lösungsformel für kubische Gleichungen, eine explizite Formel für die vier Lösungen hinzuschreiben; sie ist allerdings erstens deutlich länger und zweitens für die praktische Berechnung reeller Nullstellen mindestens genauso problematisch wie die für kubische Gleichungen.

§5: Gleichungen höheren Grades

Nach der (mehr oder weniger) erfolgreichen Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen in der ersten Hälfte des sechzehnten

Die erste Lösung einer kubischen Gleichung geht wohl aus SCIPIONE DEL FERRO (1465–1526) zurück, der von 1496 bis zu seinem Tod an der Universität Bologna lehrte. 1515 fand er eine Methode, um die Nullstellen von $x^3+px=q$ für *positive* Werte von p und q zu bestimmen (Negative Zahlen waren damals in Europa noch nicht im Gebrauch). Er veröffentlichte diese jedoch nie, so daß NICCOLO FONTANA (1499–1557, oberes Bild), genannt TARTAGLIA (der Stotterer), dieselbe Methode 1535 noch einmal entdeckte und gleichzeitig auch noch eine Modifikation, um einen leicht verschiedenen Typ kubischer Gleichungen zu lösen. TARTAGLIA war mathematischer Autodidakt, war aber schnell als Fachmann anerkannt und konnte seinen Lebensunterhalt als Mathematiklehrer in Verona und Venedig verdienen.

Die Lösung allgemeiner kubischer Gleichungen geht auf den Mathematiker, Arzt und Naturforscher GIROLAMO CARDANO (1501–1576, unteres Bild) zurück, dem TARTAGLIA nach langem Drängen und unter dem Siegel der Verschwiegenheit seine Methode mitgeteilt hatte. LODOVICO FERRARI (1522–1565) kam 14-jährig als Diener zu CARDANO; als dieser merkte, daß FERRARI schreiben konnte, machte er ihn zu seinem Sekretär. 1540 fand FERRARI die Lösungsmethode für biquadratische Gleichungen; 1545 veröffentlichte CARDANO in seinem Buch *Ars magna* die Lösungsmethoden für kubische und biquadratische Gleichungen.

Der norwegische Mathematiker NILS HENRIK ABEL (1802–1829) ist trotz seinen frühen Todes (an Tuberkulose) Initiator vieler Entwicklungen der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts; Begriffe wie abelsche Gruppen, abelsche Integrale, abelsche Funktionen, abelsche Varietäten, die auch in der heutigen Mathematik noch allgegenwärtig sind, verdeutlichen seinen Einfluß. Zu seinem 200. Geburtstag stiftete die norwegische Regierung einen ABEL-Preises für Mathematik mit gleicher Ausstattung und Vergabebedingungen wie die Nobelpreise; erster Preisträger war 2003 JEAN-PIERRE SERRE (*1926) vom Collège de France für seine Arbeiten über algebraische Geometrie, Topologie und Zahlentheorie.

Jahrhunderts beschäftigten sich natürlich viele Mathematiker mit dem

nächsten Fall, der Gleichung fünften Grades. Hier gab es jedoch über 250 Jahre lang keinerlei Fortschritt, bis zu Beginn des neunzehnten Jahrhunderts ABEL glaubte, eine Lösung gefunden zu haben. Er entdeckte dann aber recht schnell seinen Fehler und bewies stattdessen 1824, daß es *unmöglich* ist, die Lösungen einer allgemeinen Gleichung fünften (oder höheren) Grades durch Grundrechenarten und Wurzeln auszudrücken.

Die Grundidee seines Beweises liegt in der Betrachtung von Symmetrien innerhalb der Lösungsmenge: Man betrachtet die Menge aller Permutationen der Nullstellenmenge, die durch Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erreicht werden können, wobei φ sowohl mit der Addition als auch der Multiplikation verträglich sein muß. ABEL zeigt, daß diese Permutationen für allgemeine Gleichungen vom Grad größer vier eine (in heutiger Terminologie) *nichtauflösbare* Gruppe bilden und daß es aus diesem Grund keine Lösungsformel geben kann, in der nur Grundrechenarten und Wurzeln vorkommen. Der Beweis ist so umfangreich, daß er (zusammen mit den dafür notwendigen Definitionen und Sätzen) typischerweise den größten Teil der Vorlesung *Algebra I* einnimmt; über Einzelheiten kann daher hier nichts weiter gesagt werden. Interessenten finden ihn in fast jedem Algebralehrbuch im Kapitel über GALOIS-Theorie. Ein kurzes, gut lesbares Buch, das sich ganz darauf konzentriert, ist etwa

EMIL ARTIN: Galoissche Theorie, 1959 (Neuauflage 2004 bei *Deutsch*)

Der ABELsche Satz besagt selbstverständlich nicht, daß Gleichungen höheren als vierten Grades *unlösbar* seien; er sagt nur, daß es *im allgemeinen* nicht möglich ist, die Lösungen durch Wurzelausdrücke in den Koeffizienten darzustellen: Für eine allgemeine Lösungsformel muß man also außer Wurzeln und Grundrechenarten noch weitere Funktionen zulassen. Beispielsweise fanden sowohl HERMITE als auch KRONECKER 1858 Lösungsformeln für Gleichungen fünften Grades mit sogenannten elliptischen Modulfunktionen; 1870 löste JORDAN damit Gleichungen beliebigen Grades.

§6: Der Wurzelsatz von Viète

In einem Großteil dieser Vorlesung wird es um Methoden gehen, wie man trotz des Fehlens brauchbarer Lösungsformeln Aussagen über die

Nullstellen von Polynomgleichungen höheren Grades machen kann. Die folgende Methode führt nur in speziellen Fällen, dann aber mit sehr geringem Aufwand zu Nullstellen:

Angenommen, wir haben ein Polynom

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0\,,$$

mit (nicht notwendigerweise verschiedenen) Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$. Dann ist auch $f(x) = (x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n)$. Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich liefert uns die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -(z_1 + \cdots + z_n) \\ a_{n-2} &= \sum_{i<j} z_i z_j \\ a_{n-3} &= -\sum_{i<j<k} z_i z_j z_k \\ \vdots \quad & \quad\quad \vdots \\ a_0 &= (-1)^n z_1 \cdots z_n\,. \end{aligned}$$

Allgemein ist a_{n-r} bis aufs Vorzeichen gleich der Summe alle Produkte aus r Werten z_i mit verschiedenem Index. Diese Summen bezeichnet man als die *elementarsymmetrischen Funktionen* in $z_1, \ldots, z_n$ und die obigen Gleichungen als den Wurzelsatz von VIÈTE.

FRANÇOIS VIÈTE (1540–1603) studierte Jura an der Universität Poitiers, danach arbeitete er als Hauslehrer. 1573, ein Jahr nach dem Massaker an den Hugenotten, berief ihn CHARLES IX (obwohl VIÈTE Hugenotte war) in die Regierung der Bretagne; unter HENRI III wurde er geheimer Staatsrat. 1584 wurde er auf Druck der katholischen Liga vom Hofe verbannt und beschäftigte sich fünf Jahre lang nur mit Mathematik. Unter HENRI IV arbeitete er wieder am Hof und knackte u.a. verschlüsselte Botschaften an den spanischen König PHILIP II. In seinem Buch *In artem analyticam isagoge* rechnete er als erster systematisch mit symbolischen Größen.

Für eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ besagt er einfach, daß die Summe der Lösungen gleich $-p$ und das Produkt gleich q ist. Das hatten wir bereits in bei der Lösung kubischer Gleichungen ausgenutzt, um zwei Zahlen mit vorgegebenen Werten für Summe und Produkt zu berechnen.

Diese Summen, die sogenannten elementarsymmetrischen Funktionen, sind für r-Werte im mittleren Bereich recht umfangreich, die beiden Fälle $r = 0$ und $r = n - 1$ können aber gelegentlich ganz nützlich sein, um Lösungen zu erraten:

Falls wir aus irgendeinem Grund erwarten, daß alle Nullstellen ganzzahlig sind, folgt aus der Tatsache, daß ihr Produkt gleich $(-1)^n a_0$ ist, daß sie allesamt Teiler von a_0 sein müssen. Außerdem ist ihre Summe gleich $-a_{n-1}$.

Bei der Gleichung $f(x) = x^3 - 7x + 6 = 0$ etwa, die uns in §3 so viele Schwierigkeiten machte, ist das Produkt aller Nullstellen gleich -6; *falls* sie alle ganzzahlig sind, kommen also nur $\pm1, \pm2, \pm3$ und ±6 in Frage. Aus diesen acht Zahlen müssen wir drei (nicht notwendigerweise verschiedene) auswählen mit Produkt -6 und Summe null. Das geht offensichtlich nur mit $1, 2$ und -3, und Einsetzen zeigt, daß dies auch tatsächlich Nullstellen sind.

Man beachte, daß dieses Einsetzen unbedingt notwendig ist: Bei der Gleichung $g(x) = x^3 - 6x + 6 = 0$ hätten wir genauso vorgehen können und wären auf dieselben drei Kandidaten gekommen, aber $g(1) = 1, g(2) = 2$ und $g(-3) = -3$. Hier führt aber die Lösungsformel aus §3 relativ schnell ans Ziel: Einsetzen der Parameter $p = -6$ und $q = 6$ in die Lösungsformel führt zunächst auf

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9-8}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$

für die reelle Wurzel; die erste Lösung ist also

$$x_1 = u - \frac{p}{3u} = -\sqrt[3]{2} - \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\,.$$

Für die zweite und dritte Lösung müssen wir mit $u\rho$ *bzw.* $u\bar\rho$ anstelle von u arbeiten und erhalten

$$x_2 = -\sqrt[3]{2}\,\rho - \frac{2}{\sqrt[3]{2}\,\rho} = -\sqrt[3]{2}\,\rho - \sqrt[3]{4}\,\overline{\rho} \qquad \text{und}$$

$$x_3 = -\sqrt[3]{2}\,\rho - \frac{2}{\sqrt[3]{2}\,\overline{\rho}} = \sqrt[3]{2}\,\overline{\rho} - \sqrt[3]{4}\,\rho\,,$$

was nach Einsetzen von $\rho = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ und $\overline{\rho} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ auf die beiden komplexen Lösungen

$$x_{2/3} = -\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\right)}{2}i$$

führt. Natürlich erfüllen auch diese Zahlen den Satz von VIÈTE, jedoch nützt uns dieser nichts, um sie zu erraten.

Betrachten wir als nächstes Beispiel das Polynom

$$f(x) = x^4 + 14x^3 - 52x^2 - 14x + 51$$

mit $a_0 = 51 = 3 \cdot 17$. Da das Produkt aller Nullstellen diesen Wert haben muß, kommen – falls *alle* Nullstellen ganzzahlig sind – für diese nur die Werte $\pm 1, \pm 3, \pm 17$ und ± 51 in Frage. Wäre eine der Nullstellen ± 51, müßten alle anderen den Betrag eins haben und die Summe könnte nicht gleich -14 sein. Daher muß eine Nullstelle Betrag drei und eine Betrag 17 haben, die beiden anderen Betrag eins. Produkt 51 und Summe -14 erzwingt dabei offensichtlich, daß sowohl $+1$ als auch -1 Nullstellen sind, außerdem -17 und $+3$. Einsetzen zeigt, daß alle vier auch tatsächlich Nullstellen sind.

Beim Polynom

$$f(x) = x^6 + 27x^5 - 318x^4 - 5400x^3 - 10176x^2 + 27648x + 32768$$

schließlich ist $a_0 = 32768 = 2^{15}$; hier wissen wir also nur, daß – sofern alle Nullstellen ganzzahlig sind – jede Nullstelle die Form $\pm 2^i$ haben muß, wobei die Summe aller Exponenten gleich 15 sein muß und die Anzahl der negativen Vorzeichen gerade. Einsetzen zeigt, daß

$$-1, \quad 2, \quad -4, \quad -8, \quad 16, \quad -32$$

die Nullstellen sind.

Man beachte, daß diese Vorgehensweise nur funktioniert, wenn das Polynom höchsten Koeffizienten eins hat; andernfalls ist das Produkt der Nullstellen gleich dem Quotienten aus konstantem Koeffizienten und führendem Koeffizienten mal $(-1)^{\text{Grad}}$.