WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

20. November 2008

11. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)
Berechnen Sie den ggT von

$$f = 5x^5y + 35x^3y^2 - 20x^3y^3 + 3y^4x^3 + 21y^5x - 12y^6x$$

und

$$g := 10x^6 - 35x^4y + 40x^2y^5 + 6x^4y^3 - 21y^4x^2 + 24y^8\,!$$

Für größte gemeinsame Teiler von Polynomen in einer Veränderlichen kann dazu das gcd-Kommando von Maple verwendet werden, alles andere mußsen Sie explizit eingeben.

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)
$f \in \mathbb{Z}[x]$ sei ein Polynom vom Grad drei, $g \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ habe Grad vier. Wie oft muß bei der Berechnung von $\mathrm{ggT}(f, g)$ nach der in der Vorlesung behandelten Methode ein ggT von Polynomen zweier *bzw.* einer Veränderlicher berechnet werden?

Aufgabe 3: (*4 Punkte*)
R und S seien zwei kommutative Ringe und $\varphi\colon R \to S$ sei ein Ringhomonmorphismus, d.h. $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$ und $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ für alle $f, g \in R$. Zeigen Sie, daß dann $\operatorname{Kern}\varphi = \left\{f \in R \mid \varphi(f) = 0\right\}$ ein Ideal in R ist!

Aufgabe 4: (*6 Punkte*)

a) Ist $I = \left\{f \in \mathbb{Z}[x] \mid 5|f \text{ oder } f(5) = 0\right\}$ ein Ideal von $\mathbb{Z}[x]$?

b) Ist $J = \left\{f \in \mathbb{Z}[x] \mid f(2) = 0 \text{ und } f(3) = 0\right\}$ ein Ideal von $\mathbb{Z}[x]$?

c) Berechnen Sie, falls es sich in einem oder gar beiden Fällen um ein Ideal handeln sollte, jeweils dessen Quadrat!

d) Zeigen Sie: Das kleinste Ideal, das

$$I_1 = \left\{f \in \mathbb{Z}[x] \mid f(2) = 0\right\} \quad \text{und} \quad I_2 = \left\{f \in \mathbb{Z}[x] \mid f(3) = 0\right\}$$

enthält, ist $\mathbb{Z}[x]$ selbst!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 27. November 2008, um 15.30 Uhr