Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

13. November 2008

10. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Stellen Sie $\sqrt{2}$ und $\sqrt[3]{2}$ als reelle algebraische Zahlen in der Form $(f, [a, b])$ und $(g, [c, d])$ dar, und finden Sie die entsprechende Darstellung für $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$!

b) Wie viele reelle Nullstellen hat das gefundene Polynom?

c) Stellen Sie diese Nullstellen dar als Linearkombinationen von Wurzelausdrücken!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Eine komplexe Zahl z heißt algebraisch, wenn es ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad mindestens eins gibt, so daß $f(z)$ verschwindet. Zeigen Sie, daß der Realteil, Imaginärteil und der Betrag einer solchen Zahl reelle algebraische Zahlen sind!

b) Stellen Sie Real- und Imaginärteil der L'osungen von $x^2-1-i=0$ als reelle algebraische Zahlen dar!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

Berechnen Sie das Swinnerton-Dyer-Polynom mit Nullstellen $\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{5}\pm\sqrt{7}$, und bestimmen Sie für jede Nullstelle die Vorzeichenfolge, durch die es via Thoms Lemma charakterisiert werden kann!

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Das Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad n habe die reellen Nullstellen $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$. Alle diese Nullstellen seien einfach, und w_i sei die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $f'(x_i), f''(x_i), \dots, f^{(n)}(x_i)$. Was können Sie über die Folge der w_i sagen?

b) x und y seien zwei Nullstellen des Polynoms $g \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad n; die Vorzeichenfolge der Ableitungen sei $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ für x und $\eta_1, \dots, \eta_n$ für y. Weiter sei k die kleinste Zahl, für die $\varepsilon_{n-k} \neq \eta_{n-k}$. Zeigen Sie:

1. $\varepsilon_{n-k+1} = \eta_{n-k+1} \neq 0$
2. Falls $\varepsilon_{n-k+1} = \eta_{n-k+1} > 0$ ist $x > y$ genau dann, wenn $\varepsilon_{n-k} > \eta_{n-k}$.
3. Falls $\varepsilon_{n-k+1} = \eta_{n-k+1} < 0$ ist $x > y$ genau dann, wenn $\varepsilon_{n-k} < \eta_{n-k}$.

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 20. November 2008, um 15.30 Uhr