Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

6. November 2008

9. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
$f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ sei ein reelles Polynom vom Grand n. Zeigen Sie:

a) Die Anzahl der reellen Nullstellen von f ist kongruent n modulo zwei.

b) Haben *alle* Nullstellen von f negativen Realteil, so gibt es in der Folge $(a_n, \ldots, a_0)$ keine Vorzeichenwechsel.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Das Polynom $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ habe n reelle Nullstellen. Zeigen Sie, daß dann in der Regel von Descartes das Gleichheitszeichen gilt!
Hinweis: Betrachten Sie das Polynom $g(x) = f(-x)$, und zeigen Sie, daß $\nu(f) + \nu(g) \le n$ ist!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Für jede reelle Nullstelle z des Polynoms $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ist

$$|z| \le \max\left\{1, \left|\frac{na_{n-1}}{a_n}\right|, \sqrt{\left|\frac{na_{n-2}}{a_n}\right|}, \sqrt[3]{\left|\frac{na_{n-3}}{a_n}\right|}, \ldots, \sqrt[n]{\left|\frac{na_0}{a_n}\right|}\right\}.$$

b) Finden Sie eine untere Schranke für den Betrag der kleinsten positiven Nullstelle von f !
Hinweis: Betrachten Sie das Polynom $x^n f(\frac{1}{x})$!

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*
Finden Sie Intervalle der Länge höchstens eins, so daß jede reelle Nullstelle von

$$f = x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 6x - 1$$

in genau einem dieser Intervalle liegt und jedes Intervall genau eine Nullstelle von f enthält!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 13. November 2008, um 15.30 Uhr