Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

30. Oktober 2008

8. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: (*3 Punkte*)

Zeigen Sie: Für $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ ist $\displaystyle\sum_{i=0}^{c} \binom{a}{i}\binom{b}{c-i} = \binom{a+b}{c}$.

Aufgabe 2: (*4 Punkte*)

a) $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ sei ein Gitter mit Determinante d, und K_r sei die Kugel um $(0,0,0)$ mit Radius r.

b) Zeigen Sie: $K_r \cap \Lambda$ besteht aus einer ungeraden Anzahl von Punkten.

c) Ab welchem Wert von r enthält diese Menge mindestens drei Punkte?

Aufgabe 3: (*6 Punkte*)

a) Beweisen Sie die Regel von Descartes als Folgerung aus dem Satz von Budan-Fourier!

b) Das Polynom $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ habe genau r Koeffizienten a_i, die nicht verschwinden. Dann hat f höchstens $2r-1$ verschiedene reelle Nullstellen.

c) Finden Sie eine obere Schranke für die Summe der Vielfachheiten aller reeller Nullstellen!

Aufgabe 4: (*7 Punkte*)

a) Was sagt Ihnen die Regel von Descartes über die positiven reellen Nullstellen des Polynoms $f = 15x^4 - 119x^3 + 331x^2 - 369x + 127$?

b) Was sagt sie Ihnen über die Anzahl negativer Nullstellen?

c) Was sagt sie Ihnen über die Nullstellen zwischen 2 und 3 ?

d) Was sagt der Satz von Budan-Fourier dazu?

e) Was sagt der über die Nullstellen zwischen 2 und $\frac{5}{2}$?

f) Was wissen Sie nun über die reellen Nullstellen von f ?

Hinweis: Der Maple-Befehl `subs(x = A, f)` ersetzt x überall in der Formel f durch den Ausdruck A. Letzterer darf x nicht enthalten.

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 6. November 2008, um 15.30 Uhr