WOLFGANG K. SEILER — A5, C201
Tel. 2515

2. Oktober 2008

4. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)

a) Berechnen Sie die LANDAU-MIGNOTTE-Schranke für den ggT der beiden Polynome
$$f = x^5 + 3x^3 + x^2 + 3x + 2 \quad \text{und} \quad g = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 3x + 2\,!$$

b) Wählen Sie eine Primzahl p mit der Eigenschaft, daß der ggT von f und g durch seine Reduktion modulo p eindeutig bestimmt ist, und berechnen Sie den ggT von $f \bmod p$ und $g \bmod p$!

c) Welchen ggT haben f und g in $\mathbb{Z}[x]$?

d) Für welche Primzahlen p hat $\mathrm{ggT}(f \bmod p, g \bmod p)$ einen anderen Grad als $\mathrm{ggT}(f, g)$?
Hinweis: Was wissen Sie über die Resultante von f/ggT und g/ggT ?

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

Zur Lösung dieser Aufgabe sollte nur der (erweiterte) EUKLID*ische Algorithmus benutzt werden.*

a) Ein Mathematiker möchte zur Feier seines Geburtstags die Kerzen (eine für jedes Lebensjahr) so auf ausgewählten Geburtstagstorten verteilen, daß die Anzahl auf jeder dieser Torten das Quadrat einer festen Primzahl p ist. Bei seinen Versuchen mit $p = 2, 3$ und 5 bleiben dabei aber jeweils p Kerzen übrig. Wie alt wird er?

b) Wie alt müßte er werden, bis ihm dies zum nächsten Mal passiert?

c) Einige Zeit später versucht er dasselbe bei der Feier zum Geburtstag eines klassischen griechischen Mathematikers. Aus Mangel an Torten kann er hier allerdings nicht mit so kleinen Primzahlen arbeiten; er versucht es deshalb mit $p = 7$ und $p = 11$. Wieder bleiben jeweils p Kerzen übrig. Wann wurde der griechische Mathematiker geboren?

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Bestimmen Sie mit der modularen Methode und mit höchstens zweistelligen Primzahlen den ggT in $\mathbb{Z}[x]$ der beiden Polynome
$$f = 72x^5 + 12x^4 + 84x^3 - 72x^2 - 24x + 48 \quad \text{und} \quad g = 189x^4 + 252x^3 + 21x^2 + 210x + 168\,!$$

b) Für welche Primzahlen p hat $\mathrm{ggT}(f \bmod p, g \bmod p)$ einen anderen Grad als $\mathrm{ggT}(f, g)$?

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)

a) Berechnen Sie die Funktionswerte des Polynoms $f = x^4 - x^2 + 2x - 1$ für $x = -2, -1, 0, 1, 2$!

b) Faktorisieren Sie f nach dem Verfahren von KRONECKER! Die notwendigen Interpolationspolynome liefert Ihnen der Maple-Befehl `interp([x1, ..., xn], [y1, ..., yn], x)`, der ein Polynom g in x berechnet mit $g(x_i) = y_i$.

c) Bestimme Sie die Nullstellen der biquadratischen Gleichung $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 9. Oktober 2008, um 15.30 Uhr