

25. September 2008

3. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: (6 Punkte)

- a) Bestimmen Sie für die beiden Polynome
 $f = x^4 + 182x^3 - 3788x^2 + 6282x + 10251$ und $g = x^4 - 174x^3 - 2812x^2 - 4386x + 7371$
den Grad des ggT von $f \bmod p$ und $g \bmod p$ in Abhängigkeit von der Primzahl p ! Was
ist $\text{ggT}(f, g)$ in $\mathbb{Z}[x]$?
- b) Finden Sie zwei Polynome $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ mit einem linearen Polynom als ggT derart, daß der
ggT von $f \bmod p$ und $g \bmod p$ in $\mathbb{F}_p[x]$ für $p = 17$ quadratisch und für $p = 5$ kubisch ist!

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- a) Welche Bedingung müssen die beiden Zahlen $p, q \in \mathbb{C}$ erfüllen, damit die kubische Gleichung $x^3 + px + q = 0$ eine mindestens doppelte Nullstelle hat?
- b) Wann gibt es sogar eine dreifache Nullstelle?
- c) Wann haben die beiden kubischen Gleichungen $x^3 + px + q = 0$ und $x^3 + ax + b$ eine gemeinsame Nullstelle?
- d) Wann haben sie zwei gemeinsame Nullstellen?
Hinweis: Denken Sie auch an Sätze aus den vergangenen Wochen; bei einige Teilaufgaben kann das sehr viel Zeit sparen.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

- a) Welche Bedingungen müssen die vier Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ erfüllen, damit die Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ zwei zweifache oder eine mindestens dreifache Nullstelle hat?
- b) Finden Sie eine weitere Bedingung an a, b, c, d , die genau dann erfüllt ist, wenn es eine mindestens dreifache Nullstelle gibt!

Aufgabe 4: (3 Punkte)

- a) Der Maple-Befehl zur Berechnung des ggT zweier Polynome heißt $\text{gcd}(f, g)$, der zur Berechnung des Divisionsrests von f modulo g heißt $\text{rem}(f, g, x)$. Warum muß die Variable x beim rem -Befehl angegeben werden, nicht aber bei gcd ?
- b) Finden Sie zwei Polynome $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ der Grade zwei und drei, die in $\mathbb{Q}[x]$ teilerfremd sind, nicht aber in $\mathbb{Z}[x]$! Lassen Sie $\text{ggT}(f, g)$ auch von Maple berechnen, und spekulieren Sie darüber, ob Maple den ggT in $\mathbb{Z}[x]$ oder den in $\mathbb{Q}[x]$ berechne!

Maple-Befehle, die zur Lösung nützlich sein können

Befehle aus dem Paket <code>linalg</code> ; eine Übersicht liefert der Befehl <code>?linalg</code>	
<code>resultant(f, g, x)</code>	<i>Resultante der beiden Polynome f, g in der Variablen x</i>
<code>ifactor(n)</code>	<i>Primzerlegung der ganzen Zahl n</i>
<code>factor(f)</code>	<i>Zerlegung eines Polynoms aus $\mathbb{Q}[x]$ in irreduzible Faktoren</i>
<code>diff(f, x)</code>	<i>Ableitung des Ausdrucks f nach x</i>
<code>gcd(f, g)</code>	<i>ggT zweier Polynome in beliebig vielen Variablen über \mathbb{Z} oder \mathbb{Q}</i>
<code>Gcd(f, g) mod p</code>	<i>ditto über \mathbb{F}_p</i>

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 2. Oktober 2008, um 15.30 Uhr