

25. September 2008

### 3. Übungsblatt Computeralgebra

#### Aufgabe 1: (6 Punkte)

- a) Bestimmen Sie für die beiden Polynome  
 $f = x^4 + 182x^3 - 3788x^2 + 6282x + 10251$  und  $g = x^4 - 174x^3 - 2812x^2 - 4386x + 7371$   
den Grad des ggT von  $f \bmod p$  und  $g \bmod p$  in Abhängigkeit von der Primzahl  $p$ ! Was  
ist  $\text{ggT}(f, g)$  in  $\mathbb{Z}[x]$  ?
- b) Finden Sie zwei Polynome  $f, g \in \mathbb{Z}[x]$  mit einem linearen Polynom als ggT derart, daß der  
ggT von  $f \bmod p$  und  $g \bmod p$  in  $\mathbb{F}_p[x]$  für  $p = 17$  quadratisch und für  $p = 5$  kubisch ist!

#### Aufgabe 2: (5 Punkte)

- a) Welche Bedingung müssen die beiden Zahlen  $p, q \in \mathbb{C}$  erfüllen, damit die kubische Gleichung  $x^3 + px + q = 0$  eine mindestens doppelte Nullstelle hat?
- b) Wann gibt es sogar eine dreifache Nullstelle?
- c) Wann haben die beiden kubischen Gleichungen  $x^3 + px + q = 0$  und  $x^3 + ax + b$  eine gemeinsame Nullstelle?
- d) Wann haben sie zwei gemeinsame Nullstellen?  
*Hinweis:* Denken Sie auch an Sätze aus den vergangenen Wochen; bei einige Teilaufgaben kann das sehr viel Zeit sparen.

#### Aufgabe 3: (6 Punkte)

- a) Welche Bedingungen müssen die vier Zahlen  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  erfüllen, damit die Gleichung  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  zwei zweifache oder eine mindestens dreifache Nullstelle hat?
- b) Finden Sie eine weitere Bedingung an  $a, b, c, d$ , die genau dann erfüllt ist, wenn es eine mindestens dreifache Nullstelle gibt!

#### Aufgabe 4: (3 Punkte)

- a) Der Maple-Befehl zur Berechnung des ggT zweier Polynome heißt  $\text{gcd}(f, g)$ , der zur Berechnung des Divisionsrests von  $f$  modulo  $g$  heißt  $\text{rem}(f, g, x)$ . Warum muß die Variable  $x$  beim  $\text{rem}$ -Befehl angegeben werden, nicht aber bei  $\text{gcd}$ ?
- b) Finden Sie zwei Polynome  $f, g \in \mathbb{Z}[x]$  der Grade zwei und drei, die in  $\mathbb{Q}[x]$  teilerfremd sind, nicht aber in  $\mathbb{Z}[x]$ ! Lassen Sie  $\text{ggT}(f, g)$  auch von Maple berechnen, und spekulieren Sie darüber, ob Maple den ggT in  $\mathbb{Z}[x]$  oder den in  $\mathbb{Q}[x]$  berechne!

#### Maple-Befehle, die zur Lösung nützlich sein können

Befehle aus dem Paket <code>linalg</code> ; eine Übersicht liefert der Befehl <code>?linalg</code>	
<code>resultant(f, g, x)</code>	Resultante der beiden Polynome $f, g$ in der Variablen $x$
<code>ifactor(n)</code>	Primzerlegung der ganzen Zahl $n$
<code>factor(f)</code>	Zerlegung eines Polynoms aus $\mathbb{Q}[x]$ in irreduzible Faktoren
<code>diff(f, x)</code>	Ableitung des Ausdrucks $f$ nach $x$
<code>gcd(f, g)</code>	ggT zweier Polynome in beliebig vielen Variablen über $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$
<code>Gcd(f, g) mod p</code>	ditto über $\mathbb{F}_p$

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 2. Oktober 2008, um 15.30 Uhr