Wolfgang K. Seiler B6, B4.08
Tel. 2515

6. November 2025

10. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1:

$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ sei ein Gitter, und $(b_1, \dots, b_n)$ sei eine Basis von Γ. Zeigen Sie:

a) Ersetzt man in dieser Basis den Vektor b_i durch $b_i + \lambda b_j$ mit $\lambda \in \mathbb{Z}$ und $j \neq i$, so erhält man wieder eine Gitterbasis von Γ.

b) Ist $(b_1, \dots, b_n)$ eine Orthogonalbasis von Γ, so ist $d(\Gamma)$ das Produkt der Längen der Vektoren b_i.

c) Sind $b_1, \dots, b_n$ linear unabhängige Gittervektoren und ist das Produkt ihrer Längen gleich $d(\Gamma)$, so bilden diese Vektoren eine Orthogonalbasis des Gitters.

Aufgabe 2:

Das Untergitter Γ von $\mathbb{Z}^2$ werde aufgespannt von den Vektoren $\binom{28}{6}$ und $\binom{13}{3}$.

a) Berechnen sie seine Determinante $d(\Gamma)$!

b) Welche Schranke liefert die Ungleichung von Hadamard für $d(\Gamma)$?

c) Bestimmen Sie alle Vektoren aus Γ mit Länge höchstens drei!

d) Finden Sie eine Gitterbasis aus möglichst kurzen Vektoren, und wenden Sie die Ungleichung von Hadamard darauf an!

e) Zeigen Sie, daß Γ keine Gitterbasis aus aufeinander senkrecht stehenden Vektoren hat!

Aufgabe 3:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\Gamma_n = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; x \equiv y \bmod n \right\}$.

a) Finden Sie eine Basis von Γ_n !

b) Finden Sie Orthogonalbasen von Γ_1 und Γ_2 !

c) Zeigen Sie, daß Γ_n für jedes gerade n eine Orthogonalbasis hat!

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie: Für zwei beliebige teilerfremde ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ gibt es stets eine Gitterbasis von $\mathbb{Z}^2$, die den Vektor $\binom{p}{q}$ enthält.

b) Bilden $\binom{p}{q}$ und $\binom{p'}{q'}$ eine Gitterbasis von $\mathbb{Z}^2$, so ist $\mathrm{ggT}(p, q) = \mathrm{ggT}(p', q') = 1$.

c) Für jede reelle Zahl λ gibt es eine Gitterbasis von $\mathbb{Z}^2$, deren Basisvektoren beide mindestens die Länge λ haben.

d) Ist (v, w) eine beliebige Gitterbasis von $\mathbb{Z}^2$, so hat das von v und w aufgespannte Dreieck die Fläche $\frac{1}{2}$.

e) Ist (v, w) eine Orthogonalbasis von $\mathbb{Z}^2$, so muß einer der beiden Vektoren $\binom{\pm 1}{0}$ sein und der andere $\binom{0}{\pm 1}$.

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 12. November 2025, um 15.30 Uhr