

10. Oktober 2025

6. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1:

- a) Zeigen Sie: Haben $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ die Grade $d = \deg f$ und $e = \deg g$ mit $d > e$ und ist b_e der führende Koeffizient von g , so haben bei der Division mit Rest von $b_e^{d-e+1}f$ durch g sowohl der Quotient als auch der Rest ganzzahlige Koeffizienten!
- b) Finden Sie ein Beispiel, bei dem sowohl im Quotienten als auch im Rest nichtganze Koeffizienten auftreten, wenn $b^{d-e}f$ durch g dividiert wird!
- c) Wenden Sie den EUKLIDischen Algorithmus an auf die beiden Polynome

$$f = X^8 + X^6 - 3X^4 - 3X^3 + 8X^2 + 2X - 5 \quad \text{und} \quad g = 3X^6 + 5X^4 - 4X^2 - 9X + 21,$$

wobei Sie vor jeder Polynomdivision den Dividenten gemäß a) so modifizieren, daß alle Ergebnisse ganzzahlige Koeffizienten haben! (Da die Ergebnisse recht groß werden, sollten Sie dazu ein Computeralgebrasystem benutzen.)

- d) $f^{(p)}$ und $g^{(p)}$ seien die f und g entsprechenden Polynome, bei denen alle Koeffizienten durch ihre Restklassen modulo p ersetzt werden. Berechnen Sie in $\mathbb{F}_p[X]$ für $p = 2$ und $p = 3$ den ggT von $f^{(p)}$ und $g^{(p)}$!
- e) Was folgt aus den Ergebnissen in d) für den ggT von f und g in $\mathbb{Z}[X]$?

Aufgabe 2:

- a) Wie groß ist die in der Vorlesung hergeleitete Schranke für den Betrag der Resultante der beiden Polynome aus Aufgabe 1?
- b) Wie groß ist die Resultante?
- c) Für welche Primzahlen p ist $\deg \text{ggT}(f^{(p)}, g^{(p)}) \neq \deg \text{ggT}(f, g)$?

Aufgabe 3:

- a) Berechnen Sie für die Polynome $f = (X^2 - 6X + 25)(4X^2 + 1)$ und $g = (X^2 - 5X + 6)(4X^2 + 1)$ die Höhe, die L^1 - und L^2 -Norm sowie das Maß!
- b) Wie groß ist die LANDAU-MIGNOTTE-Schranke für die Höhe von $\text{ggT}(f, g)$?
- c) Wie groß ist $H(\text{ggT}(f, g))$?

Aufgabe 4:

Die beiden Polynome $f, g \in k[X, Y]$ seien aufgefaßt als Polynome in Y über $k[X]$. Zeigen Sie:

- a) Ist $\deg \text{ggT}(f(x, Y), g(x, Y)) < \deg_Y \text{ggT}(f, g)$ für ein $x \in k$, so ist x eine Nullstelle sowohl des führenden Koeffizienten von f als auch des führenden Koeffizienten von g .
- b) Es gibt höchstens endlich viele $x \in k$, für die $\deg \text{ggT}(f(x, Y), g(x, Y)) \neq \deg_Y \text{ggT}(f, g)$ ist.

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 15. Oktober 2025, um 15.30 Uhr