Wolfgang K. Seiler B6, B4.08
Tel. 2515

4. Oktober 2025

5. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie $\operatorname{Res}_Y(f,g)$ für

$$f = X^2 - 4X + Y^2 - 6Y - 12 \quad \text{und} \quad g = X^2 + 4X + 3Y^2 - 18Y + 22\,,$$

indem Sie die Sylvester-Matrix auf Dreiecksgestalt bringen!

b) Bestimmen Sie die gemeinsamen Nullstellen von f und g exakt, und berechnen Sie angenäherte numerische Werte dafür!

c) Skizzieren Sie die Nullstellenmengen der beiden Gleichungen, und vergleichen Sie Ihre Zeichnung mit dem Rechenergebnis!

Aufgabe 2:

Berechnen Sie nach dem in der Vorlesung behandelten Euklid-artigen Algorithmus die Resultante der beiden Polynome

$$f = X^8 + X^6 - 3X^4 - 3X^3 + 8X^2 + 2X - 5 \quad \text{und} \quad g = 3X^6 + 5X^4 - 4X^2 - 9X + 21\,!$$

Polynomdivisionen mit Rest sollten dabei mit einem Computeralgebrasystem durchgeführt werden.

Aufgabe 3:

Das *Global Positioning System* GPS NAVSTAR besteht aus einer Reihe von Satelliten, die die Erde in einer Höhe von ungefähr 20 000 km umkreisen; Navigationsgeräte können, wenn sie mindestens vier dieser Satelliten empfangen, aus den Signallaufzeiten wie folgt ihre Position berechnen: Satellit i sendet alle dreißig Sekunden eine Nachricht, die unter anderem seine Position (x_i, y_i, z_i) sowie die Zeit t_i enthält. Wird dies zur Zeit t im Punkt (x, y, z) empfangen, ist daher

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = c^2(t - t_i)^2\,,$$

wobei c die mittlere Signalgeschwindigkeit ist. Beim Empfang von vier Satelliten hat man somit vier nichtlineare Gleichungen für die vier Unbekannten x, y, z und t. Finden Sie einen Weg, dieses Gleichungssystem zu lösen durch Anwendung des Gauss-Algorithmus für lineare Gleichungssysteme und der Lösungsformel für quadratische Gleichungen!

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie ohne Berechnung der Sturmschen Kette, daß das Polynom $f = X^3 + 2X - 1$ genau eine reelle Nullstelle x hat, und daß diese im Intervall $(0, 1)$ liegt!

b) Finden Sie ein Polynom g, das $x + \sqrt{5}$ als Nullstelle hat!

c) Zeigen Sie, daß dieses Polynom nur zwei reelle Nullstellen hat, und finden Sie für jede der beiden ein Intervall der Länge höchstens zwei, das sie enthält!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 8. Oktober 2025, um 15.30 Uhr