

24. September 2025

4. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1:

- Wie viele reelle Nullstellen hat das Polynom $f = X^4 + X^3 - 7X^2 - X + 8$?
- Finden Sie nach CAUCHY ein endliches Intervall, das alle diese Nullstellen enthält!
- Zeigen Sie, daß tatsächlich alle reellen Nullstellen bereits im Intervall $(-3, 2)$ liegen!
- Bestimmen Sie für jede reelle Nullstelle x von f ein Intervall der Länge höchstens eins, das diese und keine andere Nullstelle von f enthält!

Aufgabe 2:

- Bestimmen Sie alle Werte $p \in \mathbb{R}$, für die das Polynom $g = x^4 + x + p$ keine, eine, zwei, drei bzw. vier reelle Nullstellen hat!
- Was wissen Sie über die Vorzeichen der Nullstellen?
- Für welche $p \in \mathbb{R}$ hat g eine mehrfache reelle Nullstelle?

Aufgabe 3:

Berechnen Sie für $f = X^3 + pX + q$ sowohl die Resultante von f und f' als auch die von f und $X - a$, und interpretieren Sie die Ergebnisse!

Aufgabe 4:

- Für welche Werte von Y haben die beiden Polynome $f = X^2 + XY + Y$ und $g = X^2 - Y^2$ aus $\mathbb{Q}[X, Y]$ einen gemeinsamen Faktor positiven Grades?
- Geben Sie diesen Faktor jeweils an!
- Bestimmen Sie alle Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $f(x, y) = g(x, y) = 0$ ist!

Aufgabe 5:

- Lösen Sie das nichtlineare Gleichungssystem

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 50 \quad \text{und} \quad (x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 50$$

mit Resultanten!

- Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch!
- Finden Sie einen Weg, das Gleichungssystem mit Methoden der Schulmathematik zu lösen!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 1. Oktober 2025, um 15.30 Uhr