Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.08

19. Mai 2023

12. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1:

R sei ein Integritätsbereich. Zeigen Sie:

a) Wenn für zwei Elemente $a, b \in R$ das Ideal (a, b) gleich dem von $c \in R$ erzeugten Hauptideal ist, ist c ein größter gemeinsamer Teiler von a und b.

b) Ist R ein Hauptidealring, so existiert zu je zwei Elementen $a, b \in R$ ein größter gemeinsamer Teiler $c \in R$, und es gibt Elemente $\alpha, \beta \in R$, für die $c = \alpha a + \beta b$ ist.

c) Jeder Euklidische Ring R ist ein Hauptidealring. *Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion $\nu: R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$!

Aufgabe 2:

a) R sei ein beliebiger Ring, und $I = (a)$ sowie $J = (b)$ seien zwei Hauptideale. Zeigen Sie: $I + J = (a, b)$ und $J \cdot J = (ab)$.

b) Ist $I = (a_1, \ldots, a_n)$ und $J = (b_1, \ldots, b_m)$, so ist $I + J = (a_, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$, und $I \cdot J$ wird erzeugt von den nm Produkten $a_i b_j$.

c) In $\mathbb{Z}$ sei $I = (5)$ und $J = (9)$. Zeigen Sie, daß $I \cap J = I \cdot J$ ist!

d) Gilt dies auch noch dann, wenn wir I durch das Hauptideal (15) ersetzen?

e) R sei ein faktorieller Ring, und I, J seien zwei Hauptideale in R. Zeigen Sie, daß dann auch $I \cap J$ ein Hauptideal ist! Wann ist $I \cap J = I \cdot J$?

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\big] = \big\{a + b\sqrt{-5} \bigm| a, b \in \mathbb{Z}\big\}$ ein Integritätsbereich ist!

b) Zeigen Sie, daß für die Abbildung

$$N: \begin{cases} \mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\big] \to \mathbb{Z} \\ a + b\sqrt{-5} \mapsto \big(a + b\sqrt{-5}\big)\big(a - b\sqrt{-5}\big) = a^2 + 5b^2 \end{cases}$$

gilt: $N(x \cdot y) = N(x) \cdot N(y)$.

c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\big]$ mit $N(x) \in \{1, 2, 3\}$!

d) Zeigen Sie: Läßt sich eine der vier Zahlen $2, 3, 1 \pm \sqrt{-5}$ darstellen als Produkt zweier Elemente $x, y \in \mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\big]$, so ist entweder x oder y eine der beiden Zahlen ± 1.

e) Wir betrachten die Ideale $I_1 = (2)$, $I_2 = (3)$, $I_3 = \big(1 + \sqrt{-5}\big)$ und $I_4 = \big(1 - \sqrt{-5}\big)$. Berechnen Sie die Produkte $I_1 \cdot I_2$ und $I_3 \cdot I_4$!

f) Für $\mu, \nu \in \{1, 2, 3, 4\}$ sei $I_{\mu\nu} = I_\mu + I_\nu$. Ist eines dieser Ideale ein Hauptideal?

g) Berechnen Sie die Ideale $I_{13} \cdot I_{14}$, $I_{23} \cdot I_{24}$, $I_{13} \cdot I_{23}$ und $I_{14} \cdot I_{24}$!

h) Was ist $I_{13} \cdot I_{14} \cdot I_{23} \cdot I_{24}$?

i) Ist $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\big]$ ein Euklidischer Ring?

j) Ist $\mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\big]$ ein faktorieller Ring?

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 24. Mai 2023, um 15.30 Uhr