Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.08

27. April 2023

9. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, daß das Polynom $f = X^3 + 1$ modulo einer Primzahl p genau dann in Linearfaktoren zerfällt, wenn es eine ganze Zahl x gibt mit $x^2 \equiv -3 \bmod p$!

Aufgabe 2:
Wir betrachten das Polynom $f = X^4 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$.

a) Finden Sie über die dritte binomische Formel die vollständige Zerlegung von $f^{(5)}$ in irreduzible Faktoren!
b) Zeigen Sie, daß $f^{(17)}$ in Linearfaktoren zerfällt!
c) Zerlegen Sie $f^{(3)}$ in ein Produkt irreduzibler Faktoren!

Aufgabe 3:
In $\mathbb{F}_2[X]$ ist $X^5+X^3+X+1 = (X+1)(X^4+X^3+1)$, und X^4+X^3+1 ist irreduzibel. Folgern Sie (ohne Computerhilfe), daß das Polynom $X^5 + X^3 + X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ irreduzibel ist!

Aufgabe 4:
Sei $f = X^5 + X^4 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$.

a) Zeigen Sie, daß das Polynom $f^{(2)} \in \mathbb{F}_2[X]$ quadratfrei ist!
b) Finden Sie die irreduziblen Faktoren von $f^{(2)}$!
c) Überprüfen Sie, ob f in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzible Faktoren der Höhe eins hat, die modulo zwei zu den in *b)* berechneten werden!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 3. Mai 2023, um 15.30 Uhr