

5. April 2023

## 7. Übungsblatt Computeralgebra

### Aufgabe 1:

- Bestimmen Sie die Inhalte der beiden Polynome  $f = 12X^5 + 90X^4 + 78X^2 + 18X + 36$  und  $g = (15X - 5)(12X - 24)$  aus  $\mathbb{Z}[X]$ !
- Was sind die primitiven Anteile  $f^*$  und  $g^*$  von  $f$  und  $g$ ?
- Bestimmen Sie  $\text{ggT}(f^*, g^*)$  und  $\text{ggT}(f, g)$ !

### Aufgabe 2:

- Betrachten Sie  $f = X^2Y^3 + X^2Y + X^2 + 2XY^3 + X + Y^3 - Y - 2$  als Polynom in  $Y$  über  $\mathbb{Z}[X]$  und berechnen Sie den Inhalt und den primitiven Anteil von  $f$ !
- Betrachten Sie  $f$  nun als Polynom in  $X$  über  $\mathbb{Z}[Y]$ , und berechnen Sie wieder Inhalt und primitiven Anteil!

### Aufgabe 3:

Wir betrachten die Polynome  $f = 2X^4 - X^3 + 24X^2 - 46X + 17$  und  $g = 4X^3 - 46X^2 + 74X - 26$  aus  $\mathbb{Z}[X]$ .

- Finden Sie nach CAUCHY eine obere Schranke für die Nullstellen von  $f$ !
- Modulo welcher Schranke müssen Sie  $\text{ggT}(f, g) \in \mathbb{Z}[X]$  kennen um ihn eindeutig bestimmen zu können?
- Für welche Primzahlen  $p$  könnte  $\text{ggT}(f^{(p)}, g^{(p)})$  einen kleineren Grad als  $\text{ggT}(f, g)$  haben?
- Berechnen Sie die modularen ggTs für diese Primzahlen!
- Wenden Sie den modularen Algorithmus an, zunächst nur mit  $p = 17$  und  $p = 19$ . Bestimmen Sie jeweils den ggT mit führendem Koeffizienten eins!
- Finden Sie ein Polynom aus  $\mathbb{Z}[X]$ , das modulo 17 und 19 gleich diesen Polynomen ist!
- Warum ist auch ohne Probedivisionen klar, daß dieses Polynom nicht  $\text{ggT}(f, g)$  sein kann?
- Finden Sie ein anderes Polynom aus  $\mathbb{Z}[X]$ , das zu den modularen Ergebnissen paßt, und zeigen Sie, daß es der ggT von  $f$  und  $g$  ist!
- Für welche Primzahlen  $p$  hat  $\text{ggT}(f^{(p)}, g^{(p)})$  einen größeren Grad als  $\text{ggT}(f, g)$ ?
- Berechnen Sie (mit CAS) die modularen ggTs für diese Primzahlen!

### Aufgabe 4:

Wir betrachten die Polynome  $f = X^3 - XY^2 + X - Y$  und  $g = Y^3 - X^2Y + Y - X$  aus  $\mathbb{Z}[X, Y]$ .

- Finden Sie eine obere Schranke für den  $X$ -Grad und für den  $Y$ -Grad von  $\text{ggT}(f, g)$ !
- Modulo wie vieler Spezialisierungen für  $X$  müssen Sie  $\text{ggT}(f, g)$  kennen, um ihn zu rekonstruieren?
- Für welche  $x \in \mathbb{C}$  könnte  $\deg \text{ggT}(f(x, Y), g(x, Y)) < \deg_Y \text{ggT}(f, g)$  sein?
- Berechnen Sie  $\text{ggT}(f(x, Y), g(x, Y))$  für  $x = 1, 0, -1$ !
- Was ist  $\text{ggT}(f, g)$ ?
- Für welche Spezialisierungen  $x \in \mathbb{C}$  hat  $\text{ggT}(f(x, Y), g(x, Y))$  einen größeren Grad als  $\deg_Y \text{ggT}(f, g)$ ?

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 19. April 2023, um 15.30 Uhr