

2. März 2023

3. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1:

- Berechnen Sie den ggT des Polynoms $X^4 - 3X^3 + X^2 + 4$ und seiner Ableitung!
- Bestimmen Sie alle Nullstellen dieses Polynoms!

Aufgabe 2:

In $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ seien Addition und Multiplikation komponentenweise definiert, d.h.

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb').$$

- Zeigen Sie, daß R ein Ring ist!
- Ist R auch ein Integritätsbereich?
- Bestimmen Sie die Einheitengruppe R^\times von R !
- Bestimmen Sie alle Elemente $x \in R$, für die $x^2 = x$ ist, und beschreiben Sie jeweils den Effekt der Multiplikation mit x !

Aufgabe 3:

- Bestimmen Sie alle Einheiten des Rings $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$!
- Zeigen Sie, daß R ein EUKLIDISCHER Ring ist bezüglich der Abbildung

$$v: \begin{cases} R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0 \\ a + bi \mapsto a^2 + b^2 \end{cases} !$$

- Dividieren Sie $2 + 5i$ mit Rest durch $1 + i$!

Aufgabe 4:

- Berechnen Sie die STURMSche Kette für das Polynom $f = X^3 + 4X^2 + X - 6$!
- Wie viele Nullstellen hat f im Intervall $[-4, 2]$?
- Wie viele positive und wie viele negative Nullstellen hat f ?

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 8. März 2023, um 15.30 Uhr