Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

24. November 2017

10. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(15 Punkte)*

a) Bestimmen Sie eine Gröbner-Basis des von $P_1 = X^2+Y^2+2X-4Y-27$ und $P_2 = X^2-Y^2-5$ erzeugten Ideals I von $\mathbb{Q}[X,Y]$ bezüglich der lexikographischen Ordnung!

b) Zeigen Sie, daß die Funktion $u = Y$ separierend ist!

c) Berechnen Sie die Funktion χ_Y nach der in der Vorlesung angegebenen Methode!

d) χ_Y hat eine ganzzahlige Nullstelle y_0. Bestimmen Sie diese!

e) Finden Sie das $x_0 \in \mathbb{C}$, für das $(x_0, y_0) \in V_\mathbb{C}(I)$ liegt!

f) Zeigen Sie, daß χ_Y zwischen -3 und 6 noch drei weitere Nullstellen hat, und geben Sie zu jeder ein Intervall der Länge eins an, das genau diese Nullstelle enthält!

g) Berechnen Sie alle zur Bestimmung von $g_Y(X,T)$ notwendigen Spuren von Elementen der Form XY^j über den Maxima-Befehl `poly_normal_form` unter Verwendung des in *e)* gefundenen Punkts!

h) Geben Sie für die Elemente $(x,y) \in V_C(I)$ die Komponente x via g_Y als rationale Funktion von y an!

i) Zeigen Sie, daß $g_Y(1,Y)$ in $\mathbb{Q}[X,Y]/I$ invertierbar ist und ersetzen Sie die rationale Funktion aus *h)* durch eine Polynomfunktion! Vergleichen Sie mit der in *a)* berechneten Gröbner-Basis!

j) Zeigen Sie, daß $V_\mathbb{C}(I)$ aus vier reellen Punkten besteht, und interpretieren Sie diese geometrisch!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Viète die Nullstellen der folgenden Polynome:

a) $f = X^5 - 2X^4 - 11X^3 + 40X^2 - 44X + 16$

b) $g = X^5 + 2X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 6$

Abgabe bis zum Dienstag, dem 28. November 2017, um 12.00 Uhr