Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

29. September 2017

4. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(7 Punkte)*

Wir gehen aus von einem linearen Gleichungssystem $\ell_i(x_1,\dots,x_n) = b_i$ für $i = 1,\dots,m$ über einem Körper k, betrachten die Linearformen ℓ_i als Elemente von $R = k[X_1,\dots,X_n]$, und setzen $I = (\ell_1 - b_1,\dots,\ell_m - b_m)$ in R. Wir arbeiten mit der lexikographischen Ordnung. Zeigen Sie:

a) Falls der Wert von x_i durch das Gleichungssystem eindeutig bestimmt ist, enthält jede Gröbner-Basis von I ein Polynom mit führendem Monom X_i. Gilt auch die Umkehrung?

b) Welche Möglichkeiten gibt es für die S-Polynome $S(\ell_i,\ell_j)$?

c) Das lineare Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn es eine Gröbner-Basis von I gibt, die für jedes i ein Polynom mit führendem Monom X_i enthält.

d) In diesem Fall enthält jede minimale Gröbner-Basis von I für jedes i genau ein Polynom mit führendem Term X_i.

e) Wie sieht die reduzierte Gröbner-Basis von I in diesem Fall aus?

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

a) Konstruieren Sie (ohne Verwendung eingebauter Kommandos eines Computeralgebrasystems) die reduzierte Gröbner-Basis des Ideals

$$I = \left(X^2+Y^2+Z^2-1,\ \ X^2+Y^2+Z^2-2X,\ \ 2X-3Y-Z\right)$$

des Polynomrings $k[X,Y,Z]$ bezüglich der lexikographischen Ordnung! Sie sollten dazu zwar mit S-Polynomen arbeiten, aber nicht streng dem Buchberger-Algorithmus folgen, sondern nicht mehr benötigte Erzeugende so schnell wie möglich eliminieren.

b) Bestimmen Sie die Menge aller Tripel (x,y,z), die Nullstellen aller Polynome aus I sind!

c) Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X,Y]$, das auf der Kurve

$$C = \left\{ \left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2} \right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

verschwindet! Ist C die gesamte Nullstellenmenge von f ?

b) Finden Sie eine Menge von Polynomen, die die getwistete kubische Kurve

$$C = \left\{ (t,t^2,t^3) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

als gemeinsame Nullstellenmenge haben! Ist hier C die vollständige Nullstellenmenge?

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

Das Ideal I in $\mathbb{Q}[X,Y]$ werde erzeugt von $f = X^2+2Y^2-3$ und $g = X^2+XY+Y^2-3$.

a) Berechnen Sie die Durchschnitte $I \cap k[X]$ und $I \cap k[Y]$!

b) Bestimmen Sie alle gemeinsamen Nullstellen von f und g in $\mathbb{R}^2$!

Gröbner-*Basen können Sie von einen Computeralgebrasystem berechnen lassen.*

Abgabe bis zum Dienstag, dem 10. Oktober 2017, um 12.00 Uhr