Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

20. September 2017

3. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(10 Punkte)*
Wenden Sie den Divisionsalgorithmus an auf die Division von

$$f = X^2Y^4 + Y^8 + X^3Y^2 - 4Y^2 - 4X - 4X^2$$

durch $f_1 = XY - 2$ und $f_2 = Y^3 - 1$

a) bezüglich der lexikographischen Ordnung!

b) bezüglich der graduierten lexikographischen Ordnung!

c) Liegt f im von f_1 und f_2 erzeugten Ideal von $\mathbb{Q}[X, Y]$?

Aufgabe 2: *(3 Punkte)*
Das Ideal I von $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ habe die Eigenschaft, daß mit jedem $f \in I$ auch alle in f vorkommenden Monome in I liegen. Zeigen Sie: I ist ein monomiales Ideal!

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*
$\mathcal{M}$ sei eine nichtleere Menge von Idealen des Polynomrings $k[X_1, \dots, X_n]$ über einem Körper k. Zeigen Sie, daß es in $\mathcal{M}$ ein maximales Element I gibt, d.h. ein Ideal I, das in keinem Ideal $J \in \mathcal{M}$ echt enthalten ist!
Hinweis: Zeigen Sie, daß es sonst eine unendliche echt aufsteigende Folge von Idealen gäbe, und wenden Sie den Hilbert*schen Basissatz an auf die Vereinigung dieser Ideale.*

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*
Die Ordnungsrelation $<$ auf $\mathbb{N}_0^n$ erfülle die ersten beiden Bedingungen an eine Monomordnung und zusätzlich gelte, daß $(0, \dots, 0)$ das kleinste Element von $\mathbb{N}_0$ ist.

a) Zeigen Sie: Ist X^α ein Teiler von X^β, so ist $X^\alpha < X^\beta$ im Sinne dieser Ordnung.

b) Folgern Sie aus dem Lemma von Dickson, daß $<$ eine Monomordnung ist!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 26. September 2017, um 12.00 Uhr