

19. September 2014

### 3. Übungsblatt Computeralgebra

#### Aufgabe 1: (6 Punkte)

- Berechnen Sie die Resultante der beiden Polynome  $f = X^3 + X^2 + 1$  und  $g = X^2 + X + 1$  aus  $\mathbb{Z}[X]$ !
- Was ist der ggT von  $f$  und  $g$  in  $\mathbb{Z}[X]$ ?
- Sei nun  $p$  eine Primzahl, und  $f, g$  seien als Polynome aus  $\mathbb{F}_p[X]$  aufgefaßt. Für welche  $p$  gibt es einen gemeinsamen Teiler, und wie sieht der aus?

#### Aufgabe 2: (4 Punkte)

- Berechnen Sie die Resultante der beiden Polynome  $f = X^2 + pX + q$  und  $g = X - a$  aus  $\mathbb{R}[X]$  und interpretieren Sie das Ergebnis!
- Zeigen Sie: Für  $h = X^2 + rX + s$  ist  $\text{Res}_X(f, h) = (q - s)^2 s + -(p - r)(ps - qr)$ !

#### Aufgabe 3: (5 Punkte)

- Berechnen Sie die Resultante der beiden Polynome  $f = X^3 + pX + q$  und  $g = X^2 - r$  mit  $r > 0$  aus  $\mathbb{R}[X]$
- Was können Sie über die Lösungsmenge der kubischen Gleichung  $X^3 + pX + q = 0$  sagen, wenn diese Resultante verschwindet?

#### Aufgabe 4: (6 Punkte)

- Fassen Sie die Polynome  $f = X^2Y + XY + 1$  und  $g = X^2Y + X + 1$  einmal auf als Polynome in  $X$  über  $\mathbb{R}[Y]$  und einmal als Polynome in  $Y$  über  $\mathbb{R}[X]$ , und berechnen Sie so die beiden Resultanten  $\text{Res}_X(f, g)$  und  $\text{Res}_Y(f, g)$ !
- Bestimmen Sie (ohne Resultanten) alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , für die  $f(x, y) = g(x, y) = 0$  ist!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 25. September 2014, um 12.00 Uhr