WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

8. Februar 2012

Modulklausur Computeralgebra

Aufgabe 1: (*8 Punkte*)

Finden Sie eine komplexe Zahl $z = x + iy$, für die gilt

a) $z^2 = 3 + 4i$ *b)* $z^3 = 22 + 7\sqrt{-5}$

c) Wie können Sie daraus die sämtlichen Lösungen dieser Gleichungen bestimmen? (Eventuell notwendige Rechnungen müssen nicht durchgeführt werden.)

Aufgabe 2: (*14 Punkte*)

a) Zeigen Sie, daß das Polynom $x^2 - 2 \in \mathbb{Z}[x]$ irreduzibel ist!

b) Zeigen Sie, daß jedes Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ mit $f(\sqrt{2}) = 0$ in $\mathbb{Z}[x]$ durch $x^2 - 2$ teilbar ist!
Hinweis: Betrachten Sie den ggT von f und $x^2 - 2$!

c) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome $f \in \mathbb{Z}[x]$ mit $f(\sqrt{2}) = 0$!

d) Zeigen Sie: Jedes Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$, das an der Stelle $x = \sqrt{2}$ verschwindet, verschwindet auch an der Stelle $x = -\sqrt{2}$. Gilt dies auch für Polynome aus $\mathbb{R}[x]$?

e) Ein Polynom zehnten Grades aus $\mathbb{Z}[x]$ verschwinde an den Stellen $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ sowie für $x = 1 + \sqrt{2}$. Bestimmen Sie die zehnte Nullstelle des Polynoms!

f) Finden Sie die sämtlichen Nullstellen des Polynoms $g = x^4 - x^3 - 4x^2 + 2x + 4$!

Aufgabe 3: (*12 Punkte*)

a) Stellen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 539 und 357 als Linearkombination dieser Zahlen dar!

b) Bestimmen Sie alle $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ mit $539x - 357y = 35$!

c) Berechnen Sie für zwei feste, aber beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ die Resultante der beiden Polynome $f = x^2 - a$ und $g = x - b$, und interpretieren Sie das Ergebnis!

Aufgabe 4: (*14 Punkte*)

a) Zeigen Sie: Ist $f \in \mathbb{Z}[x]$ ein primitives Polynom und $g \in \mathbb{Z}[x]$ ein beliebiges Polynom, so ist $\mathrm{ggT}(f, ag) = \mathrm{ggT}(f, g)$ für alle $a \in \mathbb{Z}$.

b) Das Polynom $f = 3x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 12x + 3$ aus $\mathbb{Z}[x]$ läßt sich schreiben als $f = ag^2$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und einem primitiven Polynom $g \in \mathbb{Z}[x]$. Bestimmen Sie a und g!

c) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f sowie die Faktorisierung von f in $\mathbb{Z}[x]$!

d) $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$ seinen zwei beliebige Polynome, M sei die LANDAU-MIGNOTTE-Schranke von P und N die von Q. Was können Sie über die Koeffizienten von $\mathrm{ggT}(P, Q)$ sagen?

Aufgabe 5: (*12 Punkte*)

Das Ideal I aus $\mathbb{Q}[x, y]$ sei erzeugt von den beiden Polynomen $f = x^2 + y^2 - 4$ und $g = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 4$.

a) Bilden f und g eine GRÖBNER-Basis von I bezüglich der lexikographischen Ordnung?

b) Bestimmen Sie alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $f(x, y) = g(x, y) = 0$ ist!

c) Interpretieren Sie das Ergebnis aus *b)* geometrisch!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 8. Februar 2012, um 13.30 Uhr