WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

1. Dezember 2011

13. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

a) Zerlegen Sie das Polynom $x^4 - 18x^2 + 32x - 15 \in \mathbb{Z}[x]$ in Linearfaktoren!

b) Die kubische Gleichung $x^3 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ habe eine einfache Nullstelle x_1 und eine doppelte Nullstelle x_2. Zeigen Sie, daß dann beide Nullstellen reell sind und $|x_2| = 2 \cdot |x_1| \neq 0$ ist!

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) Stellen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 221 und 153 als Linearkombination dieser Zahlen dar!

b) Zeigen Sie, daß es höchstens drei Zahlen $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt, für die der ggT der beiden Polynome $f_\lambda = x^3 + \lambda x^2 + \lambda x + \lambda$ und $g = x^3 + 3x + 1$ aus $\mathbb{C}[x]$ positiven Grad hat!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Für welche Primzahlen p könnte der ggT der beiden Polynome $f = 10x^5 + 3x^2 + 1$ und $g = 6x^7 - 2x^3 + x + 7$ aus $\mathbb{Z}[x]$ einen größeren Grad haben als der von $f \bmod p$ und $g \bmod p$ in $\mathbb{F}_p[x]$?

b) Schreiben Sie $h = x^5y^2 + y^5x^2 + x^5 + y^3x^2 + y^4 + y^2$ als Polynom in x mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}[y]$ und berechnen Sie seinen Inhalt!

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

Das Polynome $x^5 + x^3 + x + 2 \in \mathbb{F}_3[x]$ ist irreduzibel.

a) Faktorisieren Sie das Polynom $x^{15} + x^9 + x^3 + 2 \in \mathbb{F}_3[x]$!

b) Faktorisieren Sie das Polynom $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 5x - 1 \in \mathbb{Z}[x]$!

Aufgabe 5: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie,daß die Polynome $f = 5x + y^3 - 10y$ und $g = y^4 - 10y^2 + 25$ bezüglich der lexikographischen Ordnung eine GRÖBNER-Basis des Ideals (f, g) in $\mathbb{Q}[x, y]$ bilden!

b) Bestimmen Sie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = g(x, y) = 0\}$!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 8. Dezember 2011, um 15.30 Uhr