WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

24. November 2011

12. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

Das lineare Gleichungssystem $\ell_i(x_1, \dots, x_n) = b_i$ für $i = 1, \dots, m$ über dem Körper k sei eindeutig lösbar.

a) Zeigen Sie, daß jede minimale GRÖBNER-Basis des Ideal $I = (\ell_1 - b_1, \dots, \ell_m - b_m)$ in $k[x_1, \dots, x_n]$ bezüglich der lexikographischen Ordnung für jedes i genau ein Polynom mit führendem Monom x_i enthält.

b) Wie sieht die reduzierte GRÖBNER-Basis von I aus?

c) Zeigen Sie: Im Polynomring $k[X]$ in einer Veränderlichen ist jede minimale GRÖBNER-Basis eines Ideal reduziert.

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{R}[x, y]$, das auf der Kurve

$$K = \left\{ \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

verschwindet! Ist K die gesamte Nullstellenmenge von f?

b) Finden Sie eine Menge von Polynomen, die die getwistete kubische Kurve

$$C = \left\{ (t, t^2, t^3) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

als gemeinsame Nullstellenmenge haben! Ist hier C die vollständige Nullstellenmenge?

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

Das Ideal I in $\mathbb{Q}[x, y]$ werde erzeugt von $f = x^2 + 2y^2 - 3$ und $g = x^2 + xy + y^2 - 3$.

a) Berechnen Sie die Durchschnitte $I \cap k[x]$ und $I \cap k[y]$!

b) Lassen sich diese auch durch Resultanten erzeugen?

c) Bestimmen Sie alle gemeinsamen Nullstellen von f und g in $\mathbb{R}^2$!

GRÖBNER-*Basen und Resultanten können Sie von einen Computeralgebrasystem berechnen lassen.*

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms $f(x, y) = x^2y + xy^2 \in \mathbb{F}_2[x, y]$ in $\mathbb{F}_2^2$!

b) Zeigen Sie, daß für jeden unendlichen Körper k und je zwei Polynome $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ gilt: Genau dann ist $f = g$, wenn die beiden Funktionen

$$F\colon \begin{cases} k^n \to k \\ (a_1, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, \dots, a_n) \end{cases} \quad \text{und} \quad G\colon \begin{cases} k^n \to k \\ (a_1, \dots, a_n) \mapsto g(a_1, \dots, a_n) \end{cases}$$

übereinstimmen!

c) Finden Sie in $\mathbb{F}_5[x, y]$ zwei Polynome $f \neq g$ mit $F = G$, wobei F aber keine konstante Funktion sein soll!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 1. Dezember 2011, um 15.30 Uhr