Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

17. November 2011

11. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(7 Punkte)*
Wir gehen aus von einem linearen Gleichungssystem

$$\ell_i(x_1, \dots, x_n) = b_i \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

über einem Körper k und betrachten das Ideal $I = (\ell_1 - b_1, \dots, \ell_m - b_m)$ in $k[x_1, \dots, x_n]$; dabei arbeiten wir mit der lexikographischen Ordnung. Zeigen Sie:

a) I ist genau dann das Nullideal, wenn jedes n-Tupel aus k^n eine Lösung des Gleichungssystems ist.

b) G sei eine Gröbner-Basis von I. Das Gleichungssystem ist genau dann unlösbar, wenn G ein Polynom vom Grad Null enthält.

c) Falls der Wert von x_i durch das Gleichungssystem eindeutig bestimmt ist, enthält jede Gröbner-Basis von I ein Polynom mit führendem Monom x_i. Gilt auch die Umkehrung?

d) Das lineare Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn es eine Gröbner-Basis von I gibt, die für jedes i ein Polynom mit führendem Monom x_i enthält.

e) Geben Sie für das lineare Gleichungssystem

$$x + y + z = 3, \quad y + z = 2 \quad \text{und} \quad z = 1$$

eine Gröbner-Basis des zugehörigen Ideals an, die nur aus Polynomen vom Grad zwei besteht!

Aufgabe 2: *(3 Punkte)*

a) I sei ein Ideal im Polynomring $k[x]$. Zeigen Sie, daß eine endliche Menge $G \subset I$ genau dann eine Gröbner-Basis ist, wenn der kleinste Grad eines Elements von G gleich dem Minimum der Grade der Elemente von I ist.

b) Im Falle von $I = (f_1, \dots, f_m)$ ist G genau dann eine Gröbner-Basis, wenn eines der f_i ein ggT der Polynome $f_1, \dots, f_m$ ist.

Aufgabe 3: *(2 Punkte)*
Bestimmen Sie in $k[x, y]$ das S-Polynom $S(f, g)$ der beiden Polynome $(x+y)^3$ und $(x-y)^2$ bezüglich der lexikographischen Monomordnung!

Aufgabe 4: *(8 Punkte)*

a) Konstruieren Sie (ohne Verwendung eingebauter Kommandos eines Computeralgebrasystems) eine möglichst einfache Gröbner-Basis des Ideals

$$I = \left(x^2 + y^2 + z^2 - 1,\ \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x,\ \ 2x - 3y - z\right)$$

des Polynomrings $k[x, y, z]$ bezüglich der lexikographischen Ordnung! Sie sollten dazu zwar mit S-Polynomen arbeiten, aber nicht streng dem Buchberger-Algorithmus folgen, sondern nicht mehr benötigte Erzeugende so schnell wie möglich eliminieren.

b) Bestimmen Sie die Menge aller Tripel (x, y, z), die Nullstellen aller Polynome aus I sind!

c) Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 24. November 2011, um 15.30 Uhr