Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

3. November 2011

9. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(3 Punkte)*

Zeigen Sie: Für $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ ist $\displaystyle\sum_{i=0}^{c} \binom{a}{i}\binom{b}{c-i} = \binom{a+b}{c}$.

Aufgabe 2: *(11 Punkte)*

a) k sei ein Körper uund $f \in k[x, y]$ ein Polynom in zwei Veränderlichen. Weiter sei $c \in k$ und $g, h \in k[x]$ seien zwei teilerfremde Polynome derart, daß $f(x, c) = g(x) \cdot h(x)$. Zeigen Sie: Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ Polynome $g_n, h_n \in k[x, y]$, so daß

$$g_n(x, c) = g(x), \quad h_n(c) = h(x) \quad \text{und} \quad f(x, y) \equiv g_n(x, y)h_n(x, y) \bmod (y - c)^n\,!$$

b) Für das Polynom

$$f(x, y) = 3x^4y^2 + 6x^2y^3 + x^4 + 2x^3 + 2x^2y + 6xy^2 + 4xy + 2x + 4 \in \mathbb{Q}[x, y]$$

ist $f(x, 1) = (x^3 + 2x + 2)(4x + 2)$. Finden Sie Polynome $g_2, h_2 \in \mathbb{Q}[x, y]$, so daß

$$g_2(x, c) = g(x), \quad h_2(c) = h(x) \quad \text{und} \quad f(x, y) \equiv g_2(x, y)h_2(x, y) \bmod (y - 1)^2\,!$$

c) Finden Sie nichtkonstante Polynome $g, h \in \mathbb{Z}[x, y]$, so daß $f(x, y) = g(x, y)h(x, y)$ ist!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y = 12 \quad \text{und} \quad x^2 + 4x + 3y^2 - 18y = -22$$

mit Hilfe einer Resultante exakt, und bestimmen Sie angenäherte numerische Werte ihrer Lösungen!

b) Skizzieren Sie die Nullstellenmengen der beiden Gleichungen und vergleichen Sie Ihre Zeichnung mit dem Rechenergebnis!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 10. November 2011, um 15.30 Uhr