Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

13. Oktober 2011

6. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Das Polynom $f = x^7 + 11x^5 - 8x^4 - 21x^3 + x^2 + 72x - 35$ erfüllt die Kongruenz

$$f \equiv (x^4 + 21x^2 + 22x + 5)(x^3 + 13x + 16) \bmod 23 .$$

a) Setzen sie diese Faktorisierung nach dem Henselschen Lemma fort zu einer Faktorisierung modulo 23^2. Für den erweiterten Euklidischen Algorithmus können Sie ein Computeralgebrasystem benutzen. In Maple setzt `gcdex(f, g, ‘a‘, ‘b‘)` die beiden Variablen a und b so, daß der ggT $af + bg$ ist; in Maxima liefert `gcdex(f, g)` die Liste $[a, b, \mathrm{ggT}]$.)

b) Versuchen Sie, daraus eine Faktorisierung von $f \in \mathbb{Z}[x]$ zu erraten und überprüfen Sie, ob diese korrekt ist!

c) Wie groß können die Koeffizienten eines irreduziblen Faktors von f höchstens werden?

Aufgabe 2: *(10 Punkte)*

a) Faktorisieren Sie das Polynom

$$f = x^7 + 3x^6 + 7x^5 + 12x^4 + 14x^3 + 15x^2 + 10x + 8$$

nach dem Algorithmus von Zassenhaus! Wählen Sie dabei für die modulare Faktorisierung die Primzahl $p = 23$ und geben Sie alle Schritte im Detail an. Modulare Faktorisierungen und (erweiterte) Euklidische Algorithmen können Sie von Ihrem Computeralgebraysstem ausführen lassen.

b) Berechnen Sie auch die modularen Faktorisierungen von f modulo p für alle Primzahlen $p < 23$; welche p sind am besten geeignet, welche ungeeignet?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Berechnen Sie nach dem in der Vorlesung behandelten Euklid-artigen Algorithmus die Resultante der beiden Polynome

$$f = x^8 + x^6 - 3x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 2x - 5 \quad \text{und} \quad g = 3x^6 + 5x^4 - 4x^2 - 9x + 21\,!$$

Polynomdivisionen mit Rest sollten dabei mit einem Computeralgebrasystem durchgeführt werden.

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 20. Oktober 2011, um 15.30 Uhr